Universidad de Oriente

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Departamento de Telecomunicaciones

TRABAJO DE DIPLOMA.

Calibración geométrica de una pseudocámara basada en un PSD.

Autor: Eduardo Remón Figueredo.

Tutor: MSc. Egberto Caballero Rosillo.

Santiago de Cuba

Junio, 2015

Universidad de Oriente

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Departamento de Telecomunicaciones

TRABAJO DE DIPLOMA.

Calibración geométrica de una pseudocámara basada en un PSD.

Autor: Eduardo Remón Figueredo.

eduardo.remon@tle.fie.uo.edu.cu.

Tutor: MSc. Egberto Caballero Rosillo.

Profesor Asistente, Departamento de Telecomunicaciones, Facultad de Ingeniería Eléctrica, ecaballero@fie.uo.edu.cu

Santiago de Cuba

Junio, 2015

COMPROMISO DEL AUTOR

Hago constar que el presente trabajo de diploma es de mi autoría exclusivamente, no constituyendo copia de ningún trabajo realizado anteriormente y las fuentes usadas para la realización del trabajo se encuentran referidas en la bibliografía. Doy mi consentimiento a que el mismo sea utilizado por la Institución, para los fines que estime conveniente, tanto de forma parcial como total y que además no podrá ser presentado en eventos, ni publicados sin autorización del Tutor o Institución.

Firma del Autor

PENSAMIENTO

Cuando uno tiene fuerza para vencerse a sí mismo, puede creerse de él que ha nacido para grandes cosas.

Jean-Baptiste Massillon

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi querida madre, por ser madre y padre a la vez, por ser la guía y principal artífice de este éxito. Por darme todo de sí sin importar nada y siempre darme a entender que en la vida hay que ser perseverante para poder vencer.

AGRADECIMIENTOS

A mi madre por ser esa persona que me da fuerzas cada día de este mundo.

A mi hermano por ser mi ejemplo a seguir y ayudarme en todo este tiempo.

A toda mi familia por apoyarme en todo momento y brindarme su apoyo incondicional.

A mi tutor por brindarme su ayuda y permitirme trabajar con él en este proyecto.

A mi vecina Bertha María por su ayuda brindada en los momentos más difíciles de este trabajo.

A mis compañeros de aula Aismel, Ricardo, Felix y Adrian por darme ánimo y apoyo todos estos años.

A todos aquellos que de alguna forma u otra contribuyeron a la realización de este trabajo.

RESUMEN

En el presente trabajo se realizó un análisis de diferentes métodos de calibración de cámaras como son los métodos de Zhang, Tsai y Faugeras; estos, tienen como esencia determinar los parámetros intrínsecos y extrínsecos del modelo geométrico de la cámara, los cuales determinan las características internas y físicas de la cámara respectivamente. Se determinó cuál de ellos podría tomarse como referencia para desarrollar un método de calibración geométrica para una pseudocámara basada en un Dispositivo Sensor de Posicionamiento (PSD, *Positioning Sensor Device*), una lente y un circuito de procesamiento de señales. Luego se describe la elaboración del modelo geométrico de la pseudocámara basado en la geometría proyectiva. Se detalla matemáticamente el proceso de calibración de la misma. Por último, se analiza la eficiencia del método de calibración a partir de los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas en el Matlab.

Palabras clave: *Pin-Hole*, Calibración de Cámara, Método de Zhang.

ABSTRACT

In the present work analyzes different methods of camera calibration methods such as Zhang, Tsai and Faugeras took place; these have as essentially determine the intrinsic and extrinsic parameters of the geometric model of the camera, which determine the internal and physical characteristics of the chamber respectively. It is determined which of them could be referenced to develop a method for geometric calibration pseudocámara based on sensor positioning device (PSD Positioning Sensor Device), a lens and signal processing circuit. The development of the geometric model of the pseudocámara based on projective geometry is then described. The calibration process is mathematically the same details. Finally, the efficiency of the calibration method is analyzed from the results of simulations in Matlab.

Keywords*:* *Pin-Hole*, Calibration Camera, Method of Zhang.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El proceso de calibración de una cámara es un paso necesario para obtener medidas de la escena a partir de imágenes de la misma. La exactitud de la calibración determinará posteriormente la precisión de las medidas que se realicen a partir de las imágenes. Es por este motivo que es imprescindible realizar la calibración de la cámara con plenas garantías de que los parámetros obtenidos son los más parecidos a los reales.
Este compromiso implica tanto la relación del método de calibración así como la correcta utilización del mismo. Aunque es posible obtener información de la escena a partir de imágenes tomadas con cámaras sin calibrar [1], el proceso de calibración resulta esencial cuando se trata de obtener medidas de las mismas.

Con esta información es posible resolver aplicaciones industriales de ensamblado de piezas, evitar obstáculos en la navegación de un robot [2], controlar un brazo robot o realizar una planificación de trayectorias [3], [4], la realización de mapas del entorno de la cámara, el seguimiento de un objeto específico o la obtención de la posición de la cámara respecto a objetos que la rodeen [1].

Existen diferentes técnicas las cuales se basan en fotogrametría o auto calibración. Los métodos basados en fotogrametría capturan una imagen de una escena conocida compuesta por una plantilla tridimensional, bidimensional o unidimensional. Las técnicas de auto calibración se basan en la obtención de varias imágenes de una misma escena aprovechando la rigidez de la misma para establecer restricciones que permitan realizar la calibración de la cámara [1].

Como resultado de la calibración de la cámara se obtienen los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la misma. La obtención de todos los parámetros de la cámara mediante calibración, no es exacta debido a imprecisiones que afectan el proceso. Estas imprecisiones surgen por imperfecciones constructivas de las lentes, desalineamientos mecánicos de las mismas o del sensor, y también por el hecho de procesar la imagen y obtener posiciones de los puntos dentro de ellas. Los resultados que se obtienen dependen tanto de la plantilla de calibración utilizada, como del algoritmo para resolverla, así como del tratamiento previo que se les pueda realizar a los datos [5].

Antecedentes del problema

En la actualidad existen varios sistemas de posicionamiento 3D que emplean cámaras como sensores de visión. Estos sistemas tienen gran utilidad en el ámbito industrial, pero resultan muy costosos. Es por ello que en estos momentos se trabaja en sistemas más económicos.

En el Departamento de Telecomunicaciones de la Facultad de Ingeniería Eléctrica, un grupo de profesores trabajan en la idea de crear un sistema de posicionamiento de bajo costo utilizando una pseudocámara; basada en un PSD, una lente y un circuito para procesar los datos; con el que se pretende determinar la posición de un objeto 3D partiendo de la información que se pueda obtener de estos dispositivos. Por tanto, es importante que para su aplicación en el sistema de posicionamiento que se pretende construir se le haga una previa calibración a la pseudocámara, para que a la hora de determinar el posicionamiento 3D se logre con el menor error posible.

Para lograr una correcta calibración de la pseudocámara se requiere entonces de una calibración geométrica. La cual permitirá obtener información relacionada con las coordenadas de un punto en el entorno, a partir de la imagen de la escena. Sin embargo no se cuenta con un método establecido para la calibración geométrica de la pseudocámara.

En el campo de la visión artificial con el empleo de cámaras como sensores de visión se han descrito varios métodos para la calibración, por lo que es imprescindible el análisis de estos, y determinar cuál de ellos podría tomarse como referencia para desarrollar un método de calibración geométrica para la pseudocámara.

Problema a resolver

La pseudocámara basada en PSD con que cuenta el Departamento de Telecomunicaciones no se puede utilizar en el cálculo de la posición 3D de un punto en el entorno a partir de la imagen porque no cuenta con un método de calibración geométrica.

Objeto de estudio

Calibración geométrica de sensores de visión.

Objetivo general.

Realizar un método de calibración geométrica para la pseudocámara basada en PSD.

Objetivos específicos

- Analizar los diferentes métodos de calibración geométrica de cámaras.
- Elaborar el modelo geométrico de la pseudocámara.
- Confeccionar un método de calibración para la pseudocámara.
- Programar y comprobar la eficiencia del método.

Hipótesis.

Si se desarrolla un método de calibración geométrica para la pseudocámara basada en PSD se contaría con un sensor de visión que puede ser utilizado para un sistema de posicionamiento 3D.

CAPITULO 1 . Calibración geométrica de cámaras.

En el presente capítulo se hace un estudio de los parámetros que caracterizan a una cámara para poder entender los procesos de calibración, Luego se expone un análisis de varios métodos de calibración geométrica de cámaras: entre los cuales están los basados en plantillas 2D y 3D como es el caso de Zhang y Faugeras respectivamente.

La idea principal tras los procesos de calibración de cámaras es describir el modelo de proyección que relaciona los sistemas de coordenadas que permiten obtener los parámetros geométricos (parámetros extrínsecos) y características internas (parámetros intrínsecos) de la cámara. Estos parámetros normalmente son calculados desde un patrón de calibración que contiene rasgos fácilmente detectables de manera precisa en la imagen capturada [6].

1.1 Parámetros que caracterizan una matriz de proyección.

Los parámetros que caracterizan una matriz de proyección se clasifican en intrínsecos y extrínsecos; los primeros son aquellos que definen el modelo de cámara utilizado, estableciendo sus características geométricas y ópticas, y los segundos son los que miden la posición y la orientación de la cámara respecto al sistema de coordenadas establecido para el mundo.

Estos dan la relación respecto al sistema de coordenadas del usuario en lugar del sistema de coordenadas de la cámara. Se incluyen 6 parámetros: tres para la traslación (T_x, T_y, T_z) y tres para los ángulos rotados sobre cada uno de los ejes (*gamma, beta, alpha*) [7], [8]. Algunos de los parámetros intrínsecos básicos son:

- Centro del eje óptico (u_0, v_0). Define el punto donde el eje óptico atraviesa el plano imagen. Las coordenadas de este punto vienen dadas en píxels.
- Factores de escalado (k_x, k_y). Es un parámetro que indica la proporción de tamaño de un objeto visto en la realidad respecto a su proyección en el plano imagen. La proporción puede ser distinta en cada eje. Frecuentemente este parámetro se descompone a su vez en:

• Factores de conversión píxel-milímetros *(d_x, d_y).* Indica el número de píxels por milímetro que usa la cámara. Esta relación se obtiene dividiendo la dimensión en píxels de la imagen por el tamaño en mm del sensor [1].

• Distancia focal *(f)*. Es la distancia existente entre ésta y su foco. Puesto que la lente de la cámara es convergente, la distancia focal es positiva [9]. Viene dada en *mm*.

• Factor de proporción *(s_x)*. Indica la relación de tamaño entre la dimensión horizontal y vertical de un píxel. La relación entre ellos (cuando no existe distorsión) viene dada por: $k_x = s_x d_x f$ y $k = d_y f$.

- Ortogonalidad de los ejes del plano imagen o asimetría (Ω1, Ω2). Geométricamente es un parámetro que mide el ángulo que forman los dos ejes de la imagen (Figura 1.1), es decir, intenta medir el grado de ortogonalidad de los ejes del plano imagen. En el caso ideal este ángulo debe ser de 90^o, es decir, estos ejes deben ser perpendiculares. En la mayoría de los casos solo se utiliza uno de los ángulos (Ω = Ω1). En situaciones reales la desviación respecto a la ortogonalidad se puede producir cuando la lente de la cámara no es paralela al plano imagen [1].

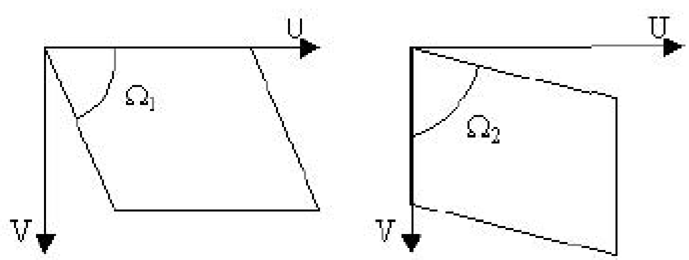

Figura 1.1 Representación de los ángulos de la asimetría. (Fuente [1]*)*

Distorsión. Se modela mediante dos componentes: una radial y otra tangencial. Cada una de ellas se desarrolla como una serie infinita de términos, aunque en la mayoría de los casos sólo se utiliza la distorsión radial, la cual se modela solo con uno o dos de esos términos.

1.2 Homografías.

Un caso particular de matriz de proyección es aquel que los puntos en la escena están distribuidos en un plano, es decir, las coordenadas de los puntos son bidimensionales. En este caso esta matriz de transformación que establece la relación entre el plano de la imagen y el plano de la plantilla se llama homografía. Formalmente se puede decir que dado un conjunto de puntos P_i en el espacio proyectivo P^2 y sus correspondientes p_i en P^2, existe una transformación proyectiva llamada homografía *H* que relaciona cada punto de un plano con su correspondiente del otro plano.

Esto representa el caso práctico de tomar una imagen de una plantilla plana en las cuales tanto los puntos en la imagen como los de la plantilla están contenidos dentro de un espacio proyectivo P^2. También podría representar el caso de la relación existente entre dos puntos correspondientes de dos imágenes distintas, considerando cada imagen como un plano proyectivo P^2. La relación entre los dos puntos está representada por la homografía *H* [5]. La transformación está expresada mediante la ecuación:

$$p_i = H \cdot P_i \tag{1.14}$$

La matriz *H* es de 3x3 elementos que constituyen la homografía. Partiendo de la matriz de proyección *M* (1.5) y asumiendo sin pérdida de generalidad que la coordenada z_w=0 en el caso de tener una plantilla bidimensional, se puede obtener la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} w \cdot u_i \\ w \cdot v_i \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

Esta expresión relaciona las coordenadas homogéneas bidimensionales de los puntos en la escena $P_i=(x_i,y_i,1)$, con sus correspondientes coordenadas homogéneas bidimensionales del punto en la $p_i=(u_i,v_i,1)$. Los elementos de la homografía *H* son idénticos a las columnas primera, segunda y cuarta de la matriz de proyección *M*. La homografía *H* al igual que la matriz de proyección *M* contiene los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara.

A partir de un conjunto de parámetros se puede generar una matriz de proyección *M* y eliminando la tercera columna, se obtiene la correspondiente homografía *H*. Sin embargo, dada una homografía *H* no es posible extraer los parámetros intrínsecos y extrínsecos que definen las características de la cámara y su posición en el mundo [5].

1.3 Clasificación de los métodos de calibración.

En la actualidad existen varios métodos para la calibración de una cámara. Estos métodos pueden clasificarse según diferentes criterios. Por ejemplo, atendiendo al método de resolución, basándose en los resultados, Atendiendo a los parámetros que forman el modelo de la cámara y atendiendo a las características de la plantilla que se utiliza para la calibración.

1.3.1 Atendiendo al método de resolución.

Atendiendo al método de resolución se pueden clasificar en lineales frente a no lineales o iterativos. Los métodos lineales utilizan métodos de resolución de sistemas de ecuaciones basados en mínimos cuadrados. Estos métodos obtienen una matriz de transformación que relaciona los puntos 3D en el mundo con sus proyecciones 2D en la imagen. En este caso no se calculan los parámetros que modelan la distorsión de la cámara por lo que los resultados obtenidos son bastante aproximados, sin embargo son fáciles de implementar y muy rápidos para su ejecución [10], [11]. Si por el contrario se requiere un modelo de la cámara más complejo, en el cual se incluyan las distorsiones que produce la cámara es necesario minimizar índices no lineales de forma iterativa.

El índice a minimizar suele incluir la distancia entre los puntos medidos en la imagen y los puntos proyectados obtenidos con el modelo de la cámara. La ventaja de estos métodos iterativos es que cualquier modelo puede ser calculado y además la exactitud del mismo aumenta con el número de iteraciones hasta que converge. Sin embargo, son mucho más lentos y necesitan partir de una buena aproximación de los parámetros para garantizar esta convergencia. Es por este motivo que se utilizan los resultados obtenidos por métodos lineales para iniciar la búsqueda no lineal de los parámetros. Con métodos lineales se calculan una parte del conjunto de parámetros y posteriormente utilizando métodos iterativos se mejoran estos parámetros y se estima el resto. Esta calibración realizada en dos pasos permite reducir considerablemente el número de iteraciones garantizando además la convergencia de la búsqueda iterativa de los parámetros [12], [5].

1.3.2 Atendiendo a los resultados.

Una calibración explicita obtiene directamente los parámetros del modelo de la cámara, mientras que en una implícita se obtienen matrices de transformación que contienen el conjunto de todos los parámetros. Aunque no se conoce el valor exacto de alguno de los parámetros, los resultados pueden ser utilizados para realizar medidas 3D y la generación de coordenadas en la imagen. Los métodos implícitos no son aptos para modelar la cámara ya que los parámetros que se obtienen no corresponden con los reales de la cámara [13], [14], por lo que conllevan un mayor trabajo matemático a la hora de ejecutarlos.

1.3.3 Atendiendo a los parámetros que forman el modelo de la cámara.

Los métodos de calibración también se pueden clasificar en intrínsecos y extrínsecos. Los métodos de calibración intrínsecos sólo obtienen los parámetros físicos y ópticos de la cámara. Por el contrario, los extrínsecos calculan la posición y orientación de la cámara en la escena [5].

1.3.4 Atendiendo a la plantilla de calibración.

Existen métodos que utilizan plantillas 3D, 2D, 1D o no utilizan plantilla. Los métodos que utilizan plantillas de referencia basan la calibración de la cámara en establecer una relación entre las coordenadas conocidas de los puntos en la plantilla y las coordenadas de estos puntos en la imagen.

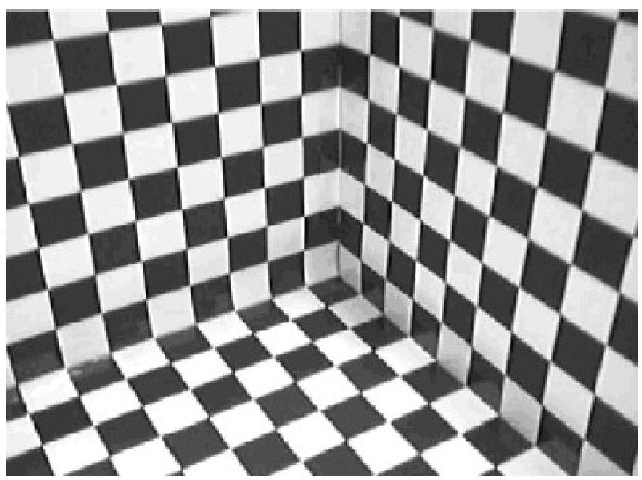

Figura 1.3. Plantilla 3D para la calibración de la cámara. (Fuente [5]*)*

En el caso de plantillas 3D (Figura 1.3) con una sola imagen de la misma es posible realizar la calibración. En este caso la plantilla consiste en dos o tres planos ortogonales entre ellos. Como se asumen los puntos en planos se evitan errores de medidas de las coordenadas de puntos en la plantilla ya que se asume la misma para todos los puntos del mismo plano. Por el contrario este tipo de calibración requiere de una elaboración costosa de la plantilla para realizarse [5].

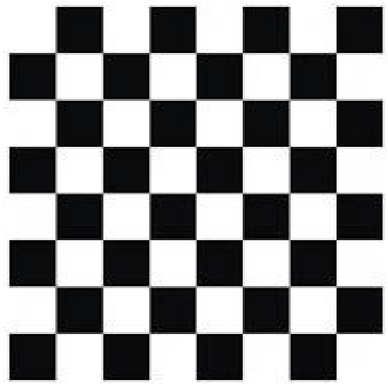

Figura 1.4. Plantilla 2D para la calibración de la cámara.

En el caso te utilizar plantillas 2D es necesario tomar varias imágenes de la misma desde varias posiciones o cambiar la posición y orientación de la plantilla. No es necesario conocer las posiciones desde donde se toman las imágenes. Este método resulta más versátil ya que la elaboración de la plantilla se puede realizar fácilmente. Los métodos de calibración basados en plantillas 1D son muy útiles en el caso de calibrar sistemas con varias cámaras. En el caso de utilizar métodos basados en plantillas 3D o 2D, dado que es necesario que todas ellas vean varios puntos de la plantilla de calibración a la vez, resulta complicado establecer una posición para la misma a no ser que la plantilla sea transparente. Es por este motivo que el método de calibración basado en una plantilla 1D resulta atractivo a la hora de calibrar un sistema con varias cámaras [15].

En algunos casos, los métodos basados en plantilla necesitan conocer la relación entre los planos para establecer más restricciones en el proceso de calibración y poder conseguir unos resultados más exactos.

Por otro lado, las técnicas que no utilizan ningún objeto de calibración pueden ser consideradas como de plantilla 0D ya que sólo es necesario establecer correspondencias de un punto en diferentes imágenes. Solamente moviendo la cámara en una escena estática, la rigidez de la escena provoca en general dos restricciones dentro de los parámetros intrínsecos de la cámara [7], [8].

1.4 Calibración basada en plantilla bidimensional.

En estos casos, como su nombre lo indica, la calibración se basa en una plantilla bidimensional, conociendo la posición de los puntos de la misma. Para calibrar la cámara con este método es necesario estimar las homografías de cada una de las imágenes tomadas de la plantilla. Con las homografías estimadas se calculan los parámetros de la cámara.

1.4.1 Método de Zhang.

Este método propone una técnica de calibración basada en la observación de una plantilla plana desde varias posiciones. El mismo resulta más versátil ya que la elaboración de la plantilla se puede realizar fácilmente. La cámara se puede desplazar manualmente ya que no es necesario conocer las posiciones de la cámara desde donde se han tomado las imágenes de la plantilla. Los parámetros se obtienen implícitamente, es decir, lo que se obtiene es una matriz cuyos elementos son función de los parámetros intrínsecos. La distorsión que se incluye es de tipo radial [5]. El modelo de la cámara que se va a estimar supone imperfecciones en la cámara, mediante el cual la obtención de las coordenadas del punto en el plano imagen se pueden obtener según las ecuaciones 1.21 y 1.22.

$$p_i = \lambda \cdot A[R \quad t] \cdot P_i = \lambda \cdot A[r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad t] \cdot P_i \tag{1.21}$$

$$\begin{bmatrix} w_i \cdot u_i \\ w_i \cdot v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} \alpha_u & \gamma & u_o \\ 0 & \alpha_v & v_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

λ es un factor de escala ya que los puntos están expresados en coordenadas homogéneas. *R* y *t* representan los parámetros extrínsecos de la cámara siendo r_i las columnas de la matriz de rotación *R*. *A* contiene los parámetros intrínsecos siendo a_u y a_v los factores de escala en cada uno de los ejes de la imagen, u_o y v_o son las coordenadas del punto principal de la imagen y γ es el parámetro que representa la perdida de ortogonalidad de los ejes de coordenadas en la imagen.

Si se parte de que la plantilla de calibración es plana, se puede asumir que los puntos de dicha plantilla están colocados de forma que su coordenada z_w=0. En este caso el modelo se reduce según la expresión 1.23.

$$p_i = \lambda \cdot A[R \quad t] \cdot P_i = \lambda \cdot A[r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad t] \cdot P_i = \lambda \cdot A \cdot [r_1 \quad r_2 \quad t] \cdot P_i \tag{1.23}$$

Ahora el modelo inicial se transforma en una homografía *H* que relaciona las coordenadas de los puntos de la plantilla plana del escenario con sus correspondientes en la imagen.

$$p_i = \lambda \cdot A \cdot [r_1 \quad r_2 \quad t] \cdot P_i = H \cdot P_i \tag{1.24}$$

Esta homografía puede ser calculada según el método descrito en el apartado anterior. Si se separan las columnas de la homografía se obtiene que:

$$[h_1 \quad h_2 \quad h_3] = \lambda \cdot A \cdot [r_1 \quad r_2 \quad t] \tag{1.25}$$

Dado que R es una matriz de rotación, los vectores que la componen cumplen las restricciones de ortonormalidad, es decir, $r_1^T \cdot r_1 = r_2^T \cdot r_2$ y que $r_1^T \cdot r_2 = 0$. Por lo tanto, si se extraen los vectores de rotación a partir de la última expresión se tiene:

$$h_1{}^T A^{-T} A^{-1} h_1 = h_2{}^T A^{-T} A^{-1} h_2 \tag{1.26}$$

$$h_1{}^T A^{-T} A^{-1} h_2 = 0 \tag{1.27}$$

Estas son las dos restricciones básicas de los parámetros intrínsecos dada una homografía. Para resolver este problema se propone una solución analítica seguida de una optimización no lineal [5]. La matriz $A^{-T}A^{-1}$ está compuesta por los parámetros intrínsecos de la cámara de la siguiente forma:

$$A^{-T} \cdot A^{-1} = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

Teniendo en cuenta que se trata de una matriz simétrica se puede definir con un vector de 6 elementos de la forma:

$$b = [b_{11} \quad b_{12} \quad b_{22} \quad b_{13} \quad b_{23} \quad b_{33}]^T \tag{1.29}$$

Por lo tanto si la columna i-ésima de la matriz H_i es $h_i = (h_{i1}; h_{i2}; h_{i3})$ se tiene que

$$h_i^T B h_i = v_{ij}^T b \tag{1.30}$$

Siendo

$$v_{ij}^T = [h_{i1}h_{j1} \quad h_{i1}h_{j2} + h_{i2}h_{j1} \quad h_{i2}h_{j2} \quad h_{i3}h_{j1} + h_{i1}h_{j3} \quad h_{i3}h_{j2} + h_{i2}h_{j3} \quad h_{i3}h_{j3}] \tag{1.31}$$

Con estas expresiones se pueden escribir las restricciones de la matriz *R* en dos ecuaciones homogéneas en función de *b* de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} v_{11}^T & -v_{22}^T \\ & v_{12}^T \end{bmatrix} b = 0 \tag{1.32}$$

Si se calculan *n* homografías a partir de *n* imágenes obtenidas de la plantilla se obtiene un sistema de ecuaciones de la forma:

$$V \cdot b = 0 \tag{1.33}$$

V es una matriz de dimensiones 2n×6. Si n ≥ 3 se tiene una solución general con solución única de *b* definida con un factor de escala. Si n=2 se puede imponer la restricción $\gamma = 0$ la cual se añade a las ecuaciones anteriores. Adoptando la solución homogénea restringiendo el módulo | m |=1, la solución del vector b es el vector propio de $V^T \cdot V$ asociado al valor propio más pequeño. En este caso se tiene también que |b|=1. Cuando se ha estimado *b* se pueden obtener los parámetros intrínsecos de la cámara mediante las expresiones expuestas en 1.34.

$$\begin{gathered} v_o = \frac{(b_{12}b_{13} - b_{11}b_{23})}{(b_{11}b_{22} - {b_{12}}^2)} \\ \lambda = b_{33} - \frac{({b_{13}}^2 + v_o(b_{12}b_{13} - b_{11}b_{23}))}{b_{11}} \\ \alpha_u = \sqrt{\frac{\lambda}{b_{11}}} \\ \alpha_v = \sqrt{\frac{\lambda b_{11}}{(b_{11}b_{22} - {b_{12}}^2)}} \\ \gamma = \frac{-b_{12}{\alpha_u}^2{\alpha_v}^2}{\lambda} \\ u_o = \frac{\gamma \cdot v_o}{\alpha_u} - \frac{b_{13}{\alpha_v}^2}{\lambda} \end{gathered} \tag{1.34}$$

λ representa un factor de escala entre la matriz *B* y la matriz $A^{-T}A^{-1}$. Utilizando los parámetros intrínsecos se forma la matriz *A* la cual permite estimar los parámetros extrínsecos según las siguientes expresiones [5]:

$$\begin{gathered} r_1 = \lambda \cdot A^{-1} \cdot h_1 \\ r_2 = \lambda \cdot A^{-1} \cdot h_2 \\ r_3 = r_1 x r_2 \\ t = \lambda \cdot A^{-1} \cdot h_3 \end{gathered} \tag{1.35}$$

1.5 Método de Tsai.

Se basa en el modelo pin-hole y para corregir la distorsión utiliza un único coeficiente, que sólo corrige la distorsión radial. El sistema que plantea tiene 9 incógnitas que se obtienen de forma explícita: 6 extrínsecas (rotación y traslación del patrón) y 3 intrínsecas (distancia focal, coeficiente de distorsión, factor de escala). El método tiene dos fases, usando computación lineal en el primer paso y en el segundo un método de optimización iterativo [1].

Las dos fases del método se descomponen en las siguientes etapas:

- Cálculo de la orientación del patrón, la traslación (T_x, T_y), y el factor de proporción (s_x). Se realiza la conversión de píxels a milímetros en función de los valores aportados por el fabricante de la cámara y situando el centro del eje óptico en el centro de la imagen se obtienen u_d y v_d. Suponiendo nula la distorsión se plantea la siguiente equivalencia $\frac{u_d}{v_d} = \frac{X_c}{Y_c}$ (la relación entre las coordenadas transformadas del plano imagen es igual a la relación de las coordenadas del objeto en el sistema de coordenadas de la cámara), obteniéndose la siguiente ecuación:

$$[\boldsymbol{v_d M^t} \quad \boldsymbol{v_d} \quad -\boldsymbol{u_d M^t}]\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u_d}$$

(1.36)

siendo M las coordenadas del objeto en el sistema de coordenadas del mundo, donde

$$a = \begin{bmatrix} s_x r_{11}/T_y \\ s_x r_{12}/T_y \\ s_x r_{13}/T_y \\ s_x T_x/T_y \\ s_x r_{21} / T_y \\ s_x r_{22} / T_y \\ s_x r_{23} / T_y \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

Resolviendo esta ecuación por mínimos cuadrados se puede extraer dos filas de la matriz de rotación (la tercera se obtiene del producto vectorial de las otras dos) y los valores de T_x, T_y, s_x:

$$|T_y| = \frac{1}{\sqrt{a_5^2 + a_6^2 + a_7^2}} \tag{1.38}$$

Para conocer el signo de T_y se selecciona un punto cuyas coordenadas se encuentren lejos del centro del eje óptico, se transforman sus coordenadas del mundo a coordenadas de la cámara usando T_y con signo positivo, si tanto el signo de X_c y de Y_c obtenidos coinciden, respectivamente, con los de u_d y v_d de ese punto. Entonces el signo de Ty es positivo, en otro caso es negativo. Por otro lado, el valor de s_x se obtiene de

$$s_x = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot |T_y| \tag{1.39}$$

Las dos primeras filas de la matriz de rotación y la traslación en X se obtienen de:

$$\begin{aligned} r_{11} &= a_1 T_y / s_x \\ r_{12} &= a_2 T_y / s_x \\ r_{13} &= a_3 T_y / s_x \\ r_{21} &= a_4 T_y \\ r_{22} &= a_4 T_y \\ r_{23} &= a_4 T_y \\ T_x &= a_4 T_y \end{aligned} \tag{1.40}$$

- Cálculo de la distancia focal *(f)*, del coeficiente de distorsión *(k_1)* y la traslación en Z *(T_z)*. Para obtener la focal y la traslación se sigue suponiendo nula la distorsión. Partiendo de $v_d = f \frac{Y_c}{Z_r + T_z}$ se obtiene la siguiente ecuación:

$$[Y_c \quad -v_d] \begin{bmatrix} f \\ T_z \end{bmatrix} = Z_r v_d \tag{1.41}$$

Al resolver esta ecuación, se obtienen los valores que sirven de aproximación inicial a un método de optimización, el cuál refinará estos valores junto con el coeficiente de distorsión. Para ello, se intenta minimizar mediante un proceso iterativo la siguiente ecuación:

$$\frac{v_f - v_o}{d_y}(1 + k_1 r) - f \frac{Y_c}{Z_r + T_z} = 0 \tag{1.42}$$

donde

$$r = (\frac{v_f - v_o}{s_x d_x})^2 + (\frac{v_f - v_o}{d_y})^2 \tag{1.43}$$

El método permite utilizar como patrón un diedro o un plano, pero en el segundo caso debe existir una inclinación de más de 30 grados respecto al plano imagen de la cámara. Uno de los problemas que plantea este método es que da por hecho que el centro del eje óptico se encuentra en el centro de la imagen. Otro inconveniente del método es que sólo se refinan los parámetros obtenidos en la segunda fase, mientras el resto *(s_x, T_x, T_y, R)* absorben el error que se comete al estimarlos suponiendo la distorsión nula [1].

1.6 Método lineal.

Es un método clásico y bien conocido de resolución de la calibración usando computación lineal. El método es bastante similar al método lineal de Faugeras. Frecuentemente se usa como aproximación inicial para obtener la matriz de transformación (*P*). Una vez obtenida la matriz, se descompone para obtener los distintos parámetros.

Este método resuelve la calibración mediante la descomposición en valores singulares de una matriz que forma el sistema de ecuaciones que proyecta un punto del espacio en el plano imagen de la cámara. Lo que se obtiene es una matriz de proyección a partir de la cual se extraen todos los parámetros, tanto los extrínsecos (traslación y rotación del patrón respecto a la cámara) como los intrínsecos (centro del eje óptico, factores de conversión y grado de no ortogonalidad del plano imagen o asimetría) [1].

Partiendo de $m = P \cdot M$, y redefiniendo P que es una matriz de 3x4 como:

$$P = \begin{bmatrix} q_1 & q_{14} \\ q_2 & q_{24} \\ q_3 & q_{34} \end{bmatrix} \tag{1.44}$$

El objetivo del método es minimizar el error que se produce entre las coordenadas reales del objeto en la imagen y las obtenidas como consecuencia de la proyección de los puntos del objeto usando la matriz de transformación. Para ello, hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} M^t & 0^t & -u \cdot M^t \\ 0^t & M^t & -v \cdot M^t \end{bmatrix} x = 0 \tag{1.45}$$

Donde $x = [q_1, q_{14}, q_2, q_{24}, q_3, q_{34}]^t$. Con lo que queda una ecuación matricial del tipo $L \cdot x = 0$. La solución a esta ecuación viene dada por el autovector de $L^t \cdot L$ asociado al autovalor más pequeño.

La matriz resultante se normaliza, es decir, se dividen todos los elementos de la matriz por $||q_3||$, que se identifica con la norma de los tres primeros elementos de la última fila de *P,* correspondientes con la última fila de la matriz de rotación. En caso de que el elemento q_{34} sea negativo hay que cambiar de signo toda la matriz. A partir de esta matriz se pueden obtener cada uno de los parámetros.

La principal ventaja de este método es que es muy rápido. Como desventaja presenta que no incluye la distorsión. En muchos métodos iterativos se pueden utilizar los resultados de este método como aproximación inicial [1].

1.7 Método de Faugeras.

Se basa en la resolución de un sistema de ecuaciones en forma matricial. Los parámetros se obtienen de forma implícita, ya que el resultado de la calibración es una matriz de transformación de 3x4 en la que se incluyen todos los parámetros, y en algunos casos no se puede extraer un parámetro en concreto sino una combinación de los mismos. Sólo necesita una imagen del patrón y no modela la distorsión.

Presenta dos alternativas para la resolución del problema, una lineal y la otra no lineal, aunque demuestra que esta última es mucho más estable ante la presencia de ruido y es la que se ha utilizado para realizar el presente estudio. En este método se obtiene primero una aproximación mediante un método lineal (en este trabajo se ha utilizado el método descrito en el punto anterior), y luego mediante un proceso iterativo se refinan los valores de la matriz de proyección perspectiva [1].

A partir de ella se obtienen los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara. Los parámetros que se modelan son los seis extrínsecos (tres de desplazamiento y tres de orientación) y cinco intrínsecos (coordenadas del centro del eje óptico *(u_o, v_o)*, factores de escalado *(k_x, k_y)* y no ortogonalidad de la imagen o asimetría (Ω). El método trata de minimizar el error en la estimación de los N puntos del patrón mediante la siguiente función:

$$Error = \sum_{i=1}^{N} ||\frac{q_1 M_i + q_{14}}{q_3 M_i + q_{34}} - u_i||^2 + ||\frac{q_2 M_i + q_{24}}{q_3 M_i + q_{34}} - v_i||^2 \qquad (1.46)$$

donde la matriz de proyección es:

$$P = \begin{bmatrix} q_1 & q_{14} \\ q_2 & q_{24} \\ q_3 & q_{34} \end{bmatrix} \qquad (1.47)$$

Esta optimización está sujeta a que $||q_3||^2$ lo que indica que la matriz de rotación, implícita en esta matriz de proyección, debe ser ortogonal.

1.8 Método de Batista.

Es un método de calibración basado en la detección de puntos en un plano y sólo necesita la adquisición de una imagen. Los parámetros intrínsecos y extrínsecos se obtienen de forma explícita. El método es iterativo y se resuelve en varias fases usando computación lineal. Es necesaria una aproximación inicial para la mayoría de los pasos. Por ejemplo, al inicio se supone que la distorsión es nula, la ortogonalidad perfecta, el factor de proporción igual a uno, el centro óptico coincide con el centro de la imagen y los factores de conversión son obtenidos de los datos ofrecidos por el fabricante. La distorsión se modela con un coeficiente (k_1) y la asimetría con dos (Ω1 y Ω2) [1].

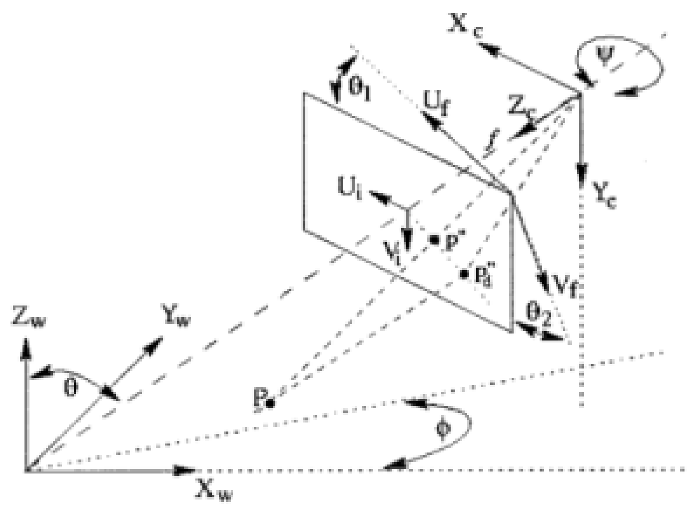

Figura 1.5. Modelo aplicado en Batista. (Fuente: [1])

El modelo de cámara en el que se basa el método de Batista difiere en pequeños detalles respecto al utilizado por el resto de los métodos. Por un lado, para obtener la matriz de rotación, utilizada para alinear el sistema de coordenadas del objeto con el de la cámara, se siguen los siguientes pasos: primero se realiza un giro alrededor del eje Z_w (φ), luego alrededor del eje Y_w (θ), quedando el objeto paralelo al plano imagen con el eje Z_w apuntando hacia la cámara, finalmente se rota de nuevo sobre el eje Z_w (ψ) de tal forma que los ejes X e Y coincidan con los ejes *u* y *v* de la imagen, como se muestra en la Figura 1.5. En la siguiente ecuación se puede ver la matriz de rotación empleada en este método.

$$R = \begin{bmatrix} -C_\psi S_\phi + S_\psi C_\phi C_\theta & C_\psi C_\phi + S_\psi S_\phi C_\theta & -S_\psi S_\theta \\ S_\psi S_\phi + C_\psi C_\phi C_\theta & -S_\psi C_\phi + C_\psi S_\phi C_\theta & -C_\psi S_\theta \\ -S_\theta S_\phi & -S_\theta S_\phi & -C_\theta \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Donde C(coseno) y S(seno). Por otro lado, se usa la siguiente transformación para modelar la distorsión (sólo se modela la radial):

$$u_d = \frac{2u_p}{1+\sqrt{1-4k_1 r}}$$
$$v_d = \frac{2v_p}{1+\sqrt{1-4k_1 r}} \qquad (1.49)$$

El proceso de calibración se divide en varias etapas, cada una de ellas dedicadas a la obtención de ciertos parámetros. En estas etapas los parámetros son obtenidos mediante ecuaciones lineales. Se utiliza un plano como patrón y sólo se necesitan las cuatro esquinas de un rectángulo para la obtener la orientación del patrón respecto a la cámara. La calibración se descompone en los siguientes cuatro pasos:

1. Obtención de los ángulos de rotación.

2. Traslación en X e Y, y obtención del factor de escala horizontal *(S_x).*

3. Cálculo de la focal, coeficiente de distorsión radial y traslación en Z.

4. Estimación del factor de escala, centro de la imagen y desviación de la ortogonalidad del eje de coordenadas de la imagen.

El procedimiento itera en dos puntos concretos: el primero finaliza cuando el factor de escala horizontal *(S_x)* converge a uno, y el segundo cuando la media de la distancia euclídea entre las coordenadas cada punto proyectado usando el modelo y las coordenadas reales de cada punto en la imagen (disparidad de la imagen) converge a un mínimo. En cada bucle se repiten los cuatro pasos descritos anteriormente, aunque en el primero no se actualizan la mayoría de los parámetros intrínsecos (factor de conversión vertical, centro del eje óptico y ángulos de asimetría) [1].

Para obtener los ángulos de rotación se supone que el origen del sistema de coordenadas del mundo coincide con el de la cámara, es decir, la traslación es nula. En este paso, los factores de conversión y el centro de la imagen se suponen conocidos (información aportada por el fabricante).

Aunque el método es iterativo y se van actualizando todos los parámetros, la obtención de los ángulos de rotación se sigue realizando sobre estos valores predefinidos, lo que confiere estabilidad al método, ya que no permite que diverjan los valores de ninguno de los parámetros. En la primera iteración también se supone que el factor de proporción es 1, la distorsión es nula (en las siguientes iteraciones se utiliza las coordenadas de imagen con la distorsión corregida para realizar este proceso) y la distancia focal viene dada por el fabricante [1].

Para calcular estos ángulos sólo se utilizan cuatro puntos que deben formar un rectángulo en el patrón; es importante que estos puntos se encuentren lo más separados entre sí que sea posible ya que esto disminuirá la incidencia del ruido que puedan tener los puntos seleccionados en la calibración. Los ángulos están determinados por las siguientes expresiones:

$$\psi = arctan\frac{A(v_{p4}-v_{p3})+B(v_{p1}-v_{p2})+C(v_{p2}-v_{p4})+D(v_{p3}-v_{p1})}{A(v_{p3}-v_{p4})+B(v_{p2}-v_{p1})+C(v_{p4}-v_{p2})+D(v_{p1}-v_{p3})} \quad (1.50)$$

$$\theta = arctan\frac{f[(u'_4-u'_2)(v'_1-v'_3)-(u'_3-u'_1)(v'_2-v'_4)]}{(u'_3v'_1-u'_1v'_3)(v'_2-v'_4)-(u'_4v'_2-u'_2v'_4)(v'_1-v'_3)} \quad (1.51)$$

$$\phi = arctan\frac{\sin\theta[(u'_3v'_4-u'_4v'_3)(u'_1-u'_2)-(u'_1v'_2-u'_2v'_1)(u'_3-u'_4)]}{f[(v'_1-v'_2)(u'_3-u'_4)(u'_1-u'_2)]} \quad (1.52)$$

La traslación *(T_x, T_y)* y el factor de escala horizontal *(S_x)* se obtienen al resolver por mínimos cuadrados una ecuación lineal. En ella se relacionan las coordenadas de imagen de todos los puntos, transformadas a milímetros pero suponiendo la distorsión nula, con los puntos del patrón rotado, los cuáles se obtienen aplicando la matriz de rotación obtenida en el paso anterior a las coordenadas 3D. Una vez calculado S_x se puede actualizar el factor de conversión horizontal d_x.

$$\begin{bmatrix} d_x(v_f - v_o) & -d_y(u_f - u_o) & d_x(v_f - v_o)X_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_xT_x \\ T_y \\ S_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_y(u_f - u_o)Y_r \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Para obtener la profundidad del objeto *(T_z)* y el coeficiente de distorsión radial se resuelve por mínimos cuadrados una ecuación lineal. En esta ecuación se relacionan las coordenadas de imagen, transformadas a milímetros mediante los parámetros actualizados, con las coordenadas del objeto respecto a la cámara, también utilizando los valores actualizados.

$$\begin{bmatrix} X_cfR_d & -u_d \\ X_cfR_d & -v_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_dZ_r - X_cf \\ v_dZ_r - Y_cf \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

donde $R_d = u_d^2 + v_d^2$

El último parámetro en actualizarse es la distancia focal efectiva, para lo que utiliza el modelo de lente de Gauss. Según este modelo la distancia focal se descompone en dos: distancia focal de la lente, que coincide con la proporcionada por el fabricante y es fija, y la distancia de enfoque. Esto proporciona dos ventajas, por un lado, permite modelar cámaras con zoom variable, y por otro lado, da estabilidad al método ya que los valores de la focal serán siempre próximos al proporcionado por el fabricante y se evita que el valor de la focal caiga a valores próximos a cero.

En definitiva, este es un método iterativo en el que se resuelven en distintas etapas y de forma lineal cada uno de los parámetros. Tiene como problema la dependencia inicial que existe de los parámetros proporcionados por el fabricante, y que para alguno de ellos no se utilizan valores actualizados, sino que siempre se utilizan los iniciales. Si estos valores iniciales están muy lejos de la realidad el error cometido puede ser grande. Por contra, esto genera estabilidad ante la presencia de ruidos, ya que no permite que parámetros interdependientes se alejen mucho de la realidad al irse distribuyendo los errores sobre los valores de los diferentes parámetros [1].

CAPITULO 2 . Calibración geométrica de la pseudocámara.

En el presente capítulo se realiza una detallada explicación de la pseudocámara basada en PSD, analizando particularmente el funcionamiento de su dispositivo de visión que es el sensor de posicionamiento, sus características y parámetros principales. Luego se pasa a realizar el modelo geométrico de la pseudocámara teniendo como como base el modelo de cámara *Pin-Hole*, descrito en el Anexo 1. Posteriormente se describe el método de calibración establecido para la pseudocámara, que en el presente trabajo se determinó utilizar el método de Zhang por las ventajas anteriormente explicadas en el Capítulo 1.

2.1 Dispositivo Sensor de Posicionamiento (PSD).

Un PSD es básicamente una unión de capas resistivas y una pareja de electrodos en los extremos. La capa resistiva tipo P sirve como área activa, y realiza la conversión foto-eléctrica. Esta capa está situada encima de una capa altamente resistiva tipo N (que equivale a la capa intrínseca de un fotodiodo *PIN*). La tercera capa, tipo N también, es a la cual se conecta el electrodo común [16]. En la Figura 2.1 se muestra una vista transversal de un PSD lineal.

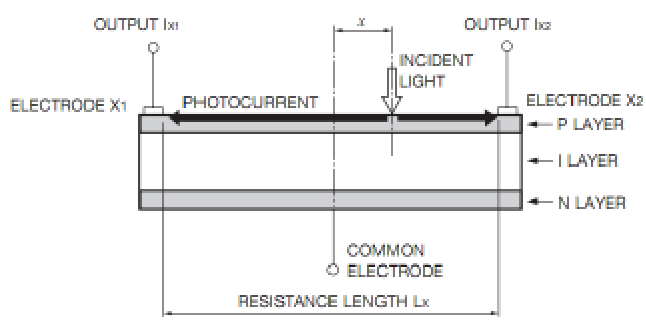

Figura 2.1. Representación de la sección transversal de un PSD lineal. (Fuente: [17]*)*

Hay PSD que solo responden al espectro infrarrojo, aunque los más comunes responden tanto al espectro infrarrojo como al visible. Cuando un haz de luz incide en el PSD, una carga eléctrica proporcional a la intensidad luminosa es generada en la posición en la que incide el punto de luz. Esta carga eléctrica fluye a través de la capa resistiva y llega a los electrodos en forma de fotocorriente. Al pasar a través de la capa resistiva, las corrientes son divididas de forma inversamente proporcional por la distancia entre el punto de incidencia y los electrodos [16].

Si se define el centro de la zona activa como el centro de coordenadas del sistema, las ecuaciones resultantes que definen las corrientes de salida son las siguientes:

$$I_{x1} = \frac{\frac{L_x}{2} - x}{L_x} \cdot I_0 \tag{2.1}$$

$$I_{x2} = \frac{\frac{L_x}{2} - x}{L_x} \cdot I_0 \tag{2.2}$$

donde, Ix1 e Ix2 son las corrientes que fluyen a través de los electrodos 1 y 2; Io es la corriente total proporcionada por el sensor (Ix1 + Ix2); Lx es la longitud del área activa del sensor; y ‘x’, es la distancia desde el punto de incidencia luminosa al centro del PSD. Así pues, combinando ambas expresiones se obtiene la posición normalizada respecto a la longitud del sensor.

$$\frac{2 \cdot x}{L_x} = \frac{I_{x2} - I_{x1}}{I_{x2} + I_{x1}} \tag{2.3}$$

Una de las ventajas de este tipo de sensores, es que la posición del punto de luz se puede calcular independientemente de la intensidad luminosa incidente y de los cambios que pueda producirse en ella. Además, dicha posición coincide con el centro geométrico de haz de luz.

2.2 Variantes de PSD.

Existen dos tipos de PSD, los unidimensionales; que son aquellos que determinan la posición de un objeto en una sola dimensión, la cual está dada por la ecuación 2.3 vista anteriormente. En la Figura 2.2 se muestra una vista superior de este tipo de sensor.

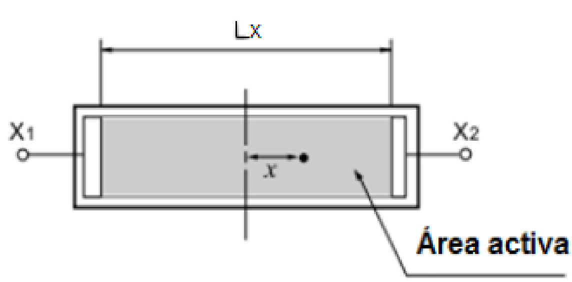

Figura 2.2. Vista superior de un PSD unidimensional. (Fuente: [18])

En cambio los bidimensionales determinan la posición en dos dimensiones (2D) respecto al centro eléctrico del sensor, de un haz de luz que incida en la superficie activa del mismo. Este tipo de sensor mantiene una estructura similar al unidimensional, pero contiene más electrodos para poder determinar ambas dimensiones. En el caso de este tipo de sensores el mismo ofrece cuatro corrientes, dos para el eje 'x' y otras dos para el eje 'y'. Existen dos tipos de sensores bidimensionales: *Duo-Lateral*, *Tetra-Lateral* y *Pin Cushion.*

2.2.1 PSD bidimensional *Duo-Lateral*.

El sensor dual está formado por dos parejas de electrodos colocados en la capa resistiva tipo N. Los electrodos colocados sobre la superficie superior dan la posición sobre la coordenada 'x', mientras que los electrodos colocados sobre la superficie inferior de la capa tipo N, dan información de la coordenada 'y', como se muestra en la Figura 2.3 [17].

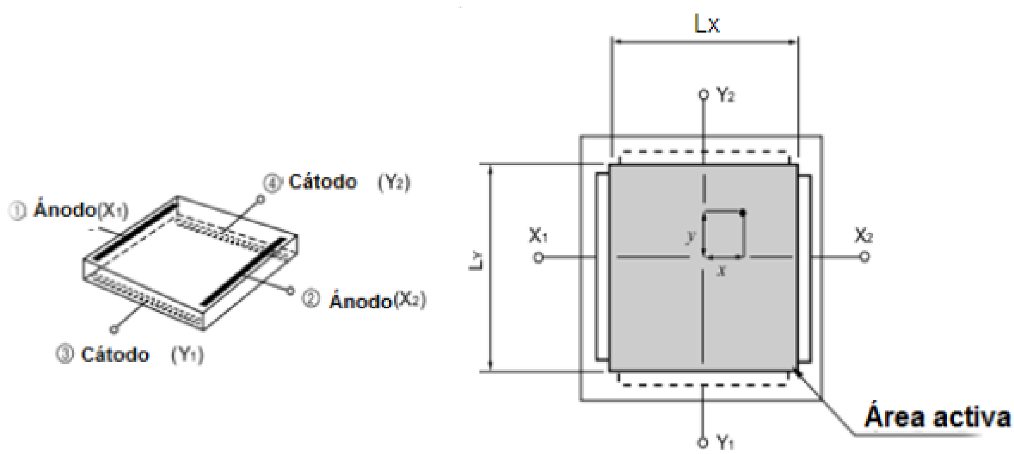

Figura 2.3. PSD bidimensional tipo Duo-Lateral. (Fuente: [17]*)*

La corriente proporcionada por los sensores *Duo-Lateral* es dos veces mayor que la proporcionada por el *Tetra-Lateral*, ya que tienen los electrodos a mayor distancia entre sí, lo cual mejora la precisión y reduce la distorsión. Las expresiones que permiten determinar las coordenadas 'x' e 'y' son las que se muestran a continuación:

$$x = \left[\frac{I_{x2}-I_{x1}}{I_{x2}+I_{x1}}\right]\frac{L}{2} \tag{2.4}$$

$$y = \left[\frac{I_{y2}-I_{y1}}{I_{y2}+I_{y1}}\right]\frac{L}{2} \tag{2.5}$$

2.2.2 PSD bidimensional *Tetra-Lateral*.

Este tipo de PSD, al igual que el anterior, posee también cuatro electrodos (ánodos) que se ubican en cada uno de los bordes de la capa superior y posee un cátodo en el centro de la capa inferior como punto de referencia en el sistema coordenado, tal y como se muestra en la Figura 2.4 [17] .

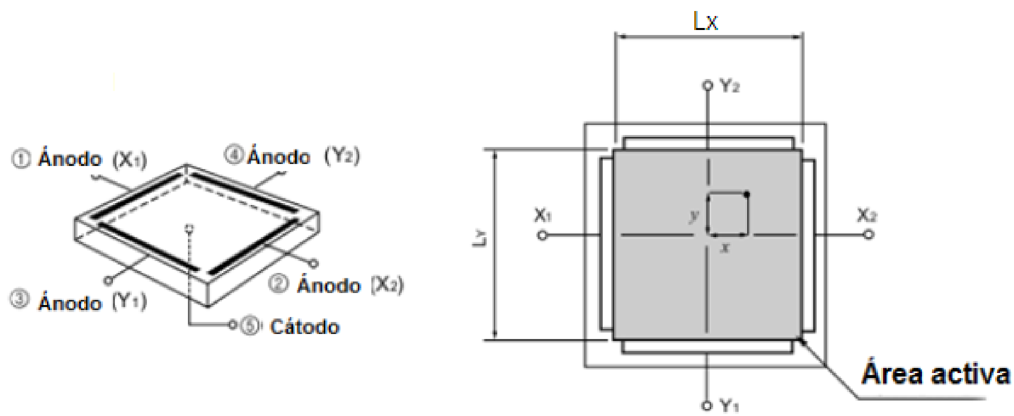

Figura 2.4. PSD bidimensional tipo Tetra-Lateral. (Fuente: [17]*)*

Las expresiones que permiten determinar las coordenadas ‘x’ e ‘y’ de un haz de luz al igual que en el duo-lateral están determinadas por la ecuaciones 2.4 y 2.5. A diferencia de los duo-lateral, este tipo de sensor presenta una menor corriente de oscuridad y una mayor velocidad de respuesta. Sin embargo estos presentan una distorsión importante que afecta la determinación de las coordenadas 2D, cuando la interacción entre los electrodos ocurre cerca de las esquinas como consecuencia de la incidencia del haz de luz en esa zona del PSD [18].

2.2.3 PSD bidimensional *Pin-Cushion*.

Este tipo de PSD es una variante mejorada del tetra-lateral, la cual ofrece una mejora en el área activa y una menor interacción entre los electrodos, lo cual se traduce en una distorsión esférica mucho menor. El *Pin-Cushion* mantiene las ventajas de los PSD *Tetra-Lateral* respecto a los *Duo-Lateral*. En la Figura 2.5 se muestra la estructura de un PSD *Pin-Cushion* [17]. Las expresiones que permiten determinar las coordenadas ‘x’ e ‘y’ en este tipo de sensor están determinadas por las ecuaciones 2.6 y 2.7. En la realización de este trabajo se escogió este tipo de sensor por las mejoras que presenta con respecto a los demás.

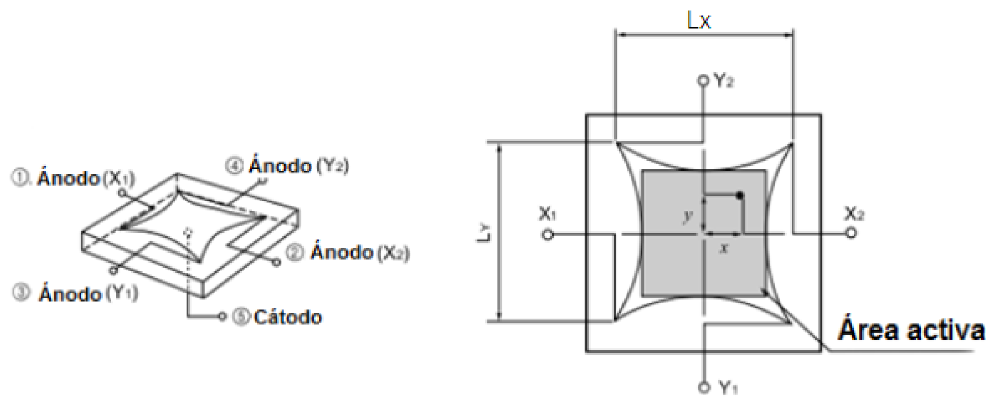

Figura 2.5. PSD bidimensional tipo Pin-Cushion. (Fuente: [17]*)*

$$x = \left[\frac{(I_{x_2}+I_{y_1})-(I_{x_1}+I_{y_2})}{(I_{x_2}+I_{y_1})+(I_{x_1}+I_{y_2})}\right]\frac{L}{2} \tag{2.6}$$

$$y = \left[\frac{(I_{x_2}+I_{y_2})-(I_{x_1}+I_{y_1})}{(I_{x_2}+I_{y_1})+(I_{x_1}+I_{y_2})}\right]\frac{L}{2} \tag{2.7}$$

2.3 Características del PSD.

Después de un análisis del funcionamiento del PSD y de los diferentes tipos que existen, hay algunas consideraciones técnicas a tener en cuenta a la hora de decidir cuál utilizar en dependencia de las aplicaciones. Entre las características que los definen, aparte de sus dimensiones y tipo, se encuentran: el error en la estimación de la posición, la resolución, la velocidad de respuesta y la fotocorriente de saturación.

2.3.1 Error en la determinación de la posición.

Hay que tener en cuenta el error que comete el PSD a la hora de estimar la posición del haz de luz cuando este incide en la superficie del mismo. Este error se plantea como la diferencia entre la posición real donde incide el haz en la superficie del PSD y la posición calculada por las fotocorrientes. La posición que estima el PSD está dada por el centro de gravedad del haz luminoso por lo que es independiente de la forma, tamaño o intensidad de este [17].

El error se estima bajo ciertas condiciones dadas por el fabricante del dispositivo. En este trabajo se utiliza un PSD 2D tipo *PIN- Cushion* S5991-01 cuyo error típico es de 0.15 *mm* para un voltaje de referencia de 5 V, una longitud de onda de 900 *nm* y diámetro del haz de luz de 0.2 *mm*. El mismo se detecta en un círculo de diámetro igual al 80% de la longitud del PSD ya que si el centro de gravedad del haz luminoso no cae en esta zona se haría imposible estimar su posición, esta región se le conoce como área activa.

2.3.2 Resolución del PSD.

La resolución de la posición es el desplazamiento mínimo del haz luz que se puede detectar en la superficie del PSD. La resolución depende de la relación señal a ruido y de la longitud del PSD y se determina por la ecuación 2.8.

$$\Delta R = \frac{L * I_n}{I_0} \tag{2.8}$$

Donde L es la longitud del PSD, In es la corriente de ruido total que se introduce en el sensor e I_0 la fotocorriente total que se genera en el mismo.

En caso que se desee trabajar con una resolución menor de la que tiene un determinado PSD, se puede hacer de las siguientes formas:

- Aumentar la señal de la fotocorriente.
- Buscar un amplificador operacional de menor ruido.
- Sustituir el PSD por uno más pequeño y de mayor resistencia entre electrodos.

Típicamente los PSD tienen una resolución en el orden de los micrómetros por lo que es muy útil en la detección de pequeños desplazamientos de un haz luminoso. Por ejemplo, el PSD utilizado en este trabajo tiene una resolución de 1.5 micrómetros, suficiente para los propósitos que aquí se plantean [17].

2.3.3 Velocidad de respuesta.

La velocidad de respuesta es el tiempo requerido desde que incide un haz de luz hasta que se extraen las fotocorrientes en el tiempo comprendido entre el 10% y el 90% del valor máximo de la corriente. Se denota comúnmente como t_r y es un parámetro importante ya que permite la detección continua de un haz que se desplaza a una alta velocidad por la superficie del PSD o cuando se modula el haz de luz a frecuencias altas para eliminar la iluminación de fondo.

Depende principalmente de la resistencia entre electrodos, de la resistencia de carga y de la capacidad terminal. En las hojas de datos del fabricante este valor se calcula cuando el haz incide en el centro del PSD mediante la expresión 2.9.

$$t_r = 0.5 * C_t * (R_{ie} + R_L) \tag{2.9}$$

Donde C_t es la capacidad terminal, R_{ie} la resistencia entre electrodos y R_L la resistencia de carga. Normalmente la resistencia entre electrodos hace la función de la resistencia de carga.

El tiempo de respuesta depende directamente del voltaje de inversa del PSD y de la longitud de onda del haz luminoso, tal y como se muestra en la Figura 2.6. Se puede observar como el tiempo de respuesta disminuye con el aumento del voltaje de polarización inversa del PSD y con una longitud de onda menor [17].

Se puede concluir que para reducir este tiempo se debe seleccionar un PSD con una resistencia entre electrodos pequeña, aumentando el voltaje de polarización inversa del PSD y seleccionándose una longitud de onda luminosa corta.

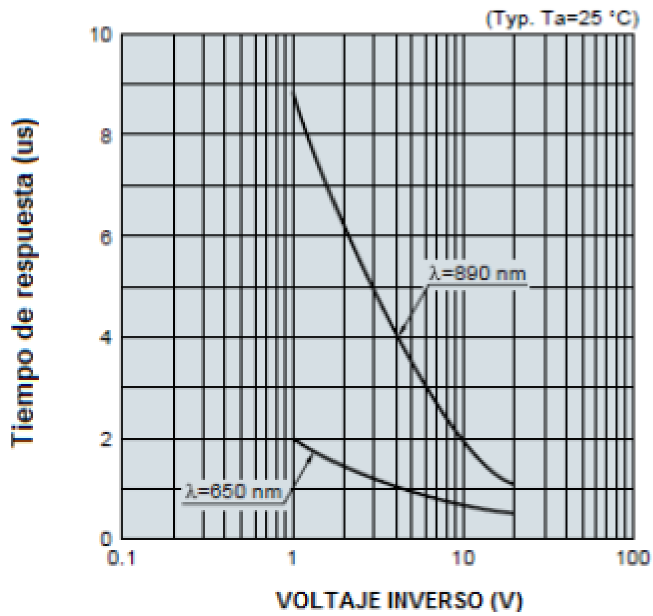

Figura 2.6. Comportamiento del tiempo de respuesta con el voltaje de inversa y la longitud de onda. (Fuente: [17]*)*

2.3.4 Saturación del PSD.

La saturación de este sensor puede ocurrir cuando se utiliza en exteriores donde la iluminación de fondo es alta o cuando la señal luminosa posee una intensidad muy grande. La Figura 2.7 muestra el comportamiento de las corrientes de un PSD unidimensional cuando el mismo funciona correctamente, se observa una linealidad de las mismas en toda la superficie del sensor [17].

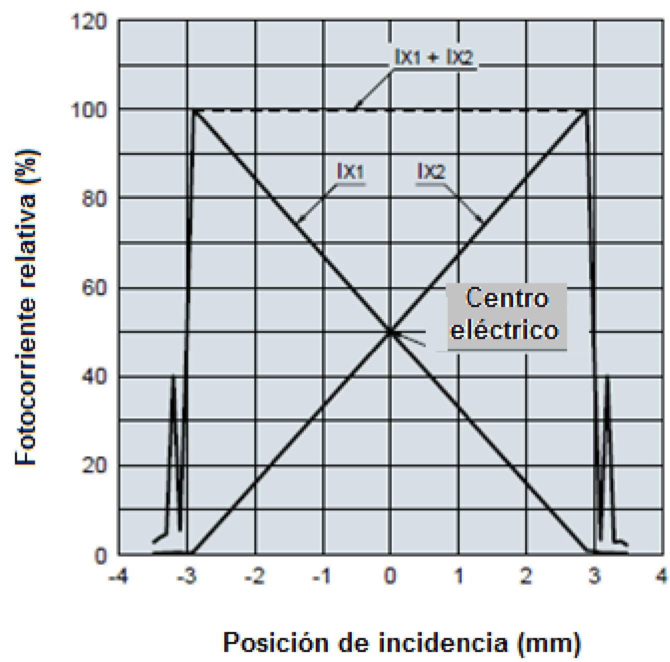

Figura 2.7. Funcionamiento correcto del PSD. (Fuente: [17]*)*

En cambio en la Figura 2.8 se aprecia como las corrientes pierden su linealidad debido a la saturación del PSD, donde no se estima correctamente la posición de incidencia del haz de luz.

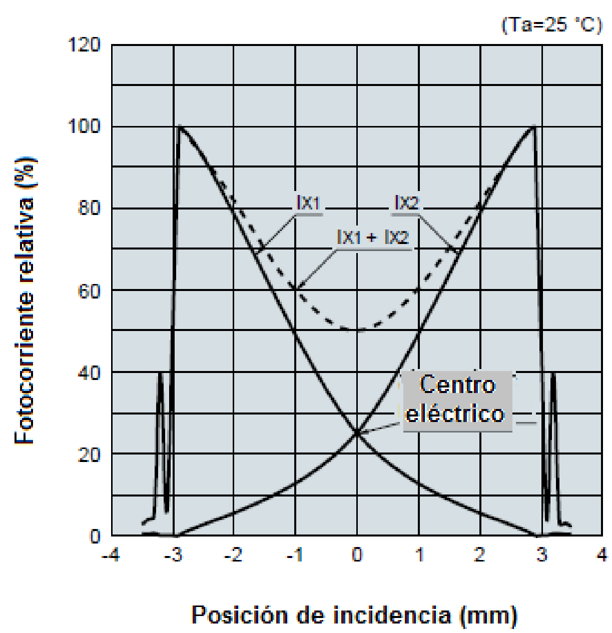

Figura 2.8. Comportamiento de las corrientes cuando el PSD se satura. (Fuente: [17]*)*

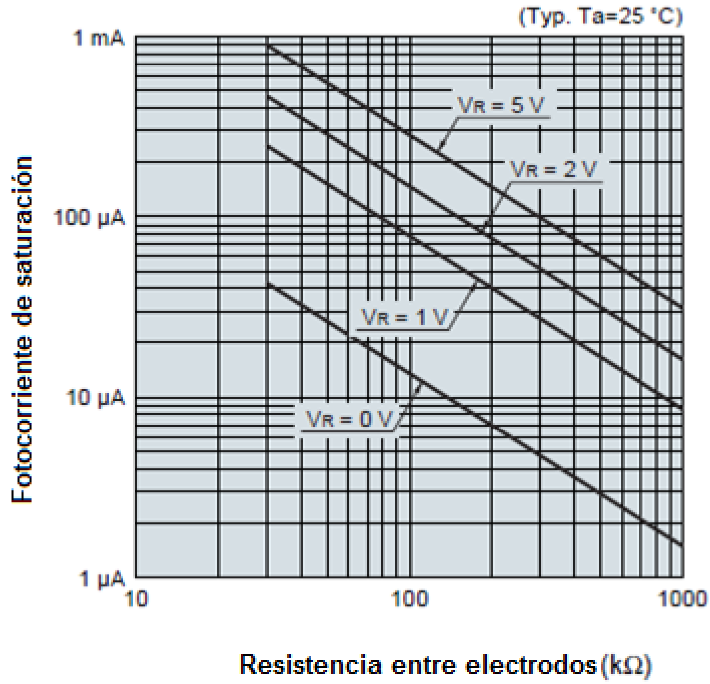

Figura 2.9. Comportamiento de la corriente de la saturación con el voltaje inverso del PSD y la resistencia entre electrodos. (Fuente: [17]*)*

La corriente de saturación depende de la resistencia entre electrodos y del voltaje de polarización inversa del PSD tal y como muestra la Figura 2.9. Para evitar que se sature el PSD se podría disminuir la resistencia entre electrodos y aumentar el voltaje de inversa, además hay que tratar de disminuir de la iluminación de fondo con el empleo de un filtro óptico y evitar la concentración intensa de luz en una zona pequeña del PSD.

2.4 Lente.

Con el objetivo de enfocar el paquete de rayos que llega de un punto de la escena al correspondiente punto del plano de la imagen se coloca una lente delgada en la pseudocámara. En la Figura 2.10 se representa este proceso.

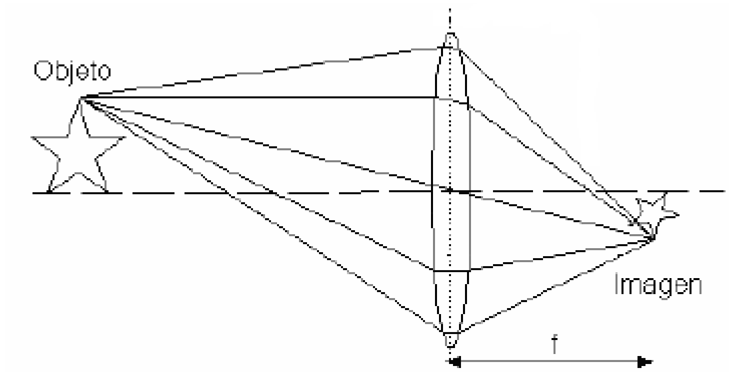

Figura 2.10. Uso de la lente para obtener mayor iluminación en el plano imagen. (Fuente: [19]*)*

El efecto de las lentes se basa en el principio de refracción de la luz. Un haz de luz se refracta cuando encuentra un obstáculo transparente, y como resultado, éste sufre un cambio en su trayectoria. Este cambio de trayectoria viene determinado por el ángulo de refracción, el cual depende del ángulo de incidencia y de la longitud de onda del rayo de luz.

Utilizando el ángulo de refracción es posible conseguir con una lente que todos los rayos de luz procedentes de un mismo punto de la escena se corten en un solo punto detrás de la lente. Este punto de corte depende del ángulo de incidencia sobre la lente de los rayos de luz. Para conseguir una imagen nítida de la escena, es necesario que el plano de la imagen esté situado justo en esa distancia de corte. Ésta se llama distancia focal del sistema de visión [19].

La distancia focal de una lente es la separación entre la lente y el punto de corte de rayos de luz procedentes del infinito. Ésta no tiene por qué coincidir con la distancia focal del sistema de visión ya que ésta última se ajusta en función de la distancia a que se encuentra la escena a retratar.

Hay que tener en cuenta que las lentes introducen distorsiones que pueden alterar de una forma u otra la conformación de una imagen. Las distorsiones introducidas por las lentes son la distorsión radial y la tangencial, existen modelos matemáticos que analizan dichas distorsiones. Considerando los modelos matemáticos basados en polinomios, que comúnmente se utilizan en fotogrametría [18], las componentes de distorsión radial y tangencial se aproximan mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} do_{xr} = (x - x_o)(a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6) \\ do_{yr} = (y - y_o)(a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6) \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} do_{xt} = p_1\left[r^2 + 2(x - x_o)^2\right] + 2p_2(x - x_o)(y - y_o) \\ do_{yt} = p_2\left[r^2 + 2(v - v_o)^2\right] + 2p_1(x - x_o)(y - y_o) \end{cases} \tag{2.11}$$

$$r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \tag{2.12}$$

Donde x_o e y_o son las coordenadas del centro óptico en la superficie del PSD y r el radio vector de posición. La distorsión radial crea imágenes en forma de cojín o en forma de barril, algo no deseado en las fotografías y la distorsión tangencial provoca que varíe la distancia focal de la imagen en el plano sensor.

2.5 Circuito de procesamiento de señal C4674.

El circuito de procesamiento de señal C4674 está diseñado para aplicaciones con PSD-2D tipo PIN-Cushion. Este circuito realiza todo el proceso de amplificación, suma, resta y división analógica de las señales provenientes del PSD para el cálculo de las coordenadas del haz luminoso.

Una de las características del circuito a tener en cuenta es el tiempo de respuesta, el cual está dado por el tiempo desde que incide el haz luminoso en la superficie del PSD hasta que se extraen las corrientes del PSD, este tiene un valor de 30 microsegundos o que es lo mismo una frecuencia de 33 kHz. La Figura 2.11 muestra una vista inferior del circuito C4674 [18].

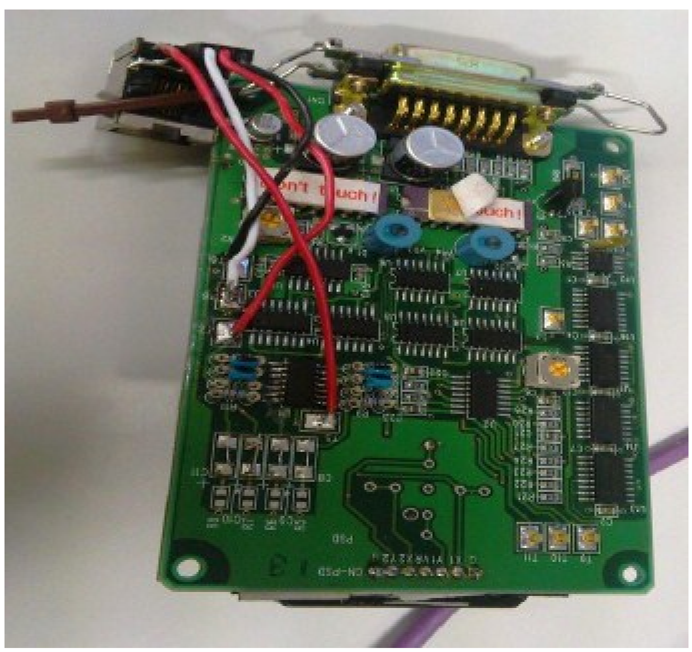

Figura 2.11. Vista inferior del circuito de procesamiento de señal C4674. (Fuente: [18]*)*

2.6 Modelo geométrico de la pseudocámara.

Para describir el modelo geométrico de la pseudocámara, se tomó como base el modelo geométrico de cámara *Pin-Hole* descrito en el Anexo 1. Para este trabajo se utilizó el sensor de posicionamiento *Pin-Cushion*, por lo que las coordenadas *(x, y)* eléctricas a utilizar están determinadas por las ecuaciones (2.6) y (2.7) respectivamente. Para poder distinguir los sistemas de coordenadas se ha denotado $\dot{x}$, $\dot{y}$ para especificar que son las coordenadas eléctricas que ofrece el sensor, como se muestra a continuación:

$$\dot{x} = \left[\frac{(I_{x_2}+I_{y_1})-(I_{x_1}+I_{y_2})}{(I_{x_2}+I_{y_1})+(I_{x_1}+I_{y_2})}\right]\frac{L}{2} \tag{2.13}$$

$$\dot{y} = \left[\frac{(I_{x_2}+I_{y_2})-(I_{x_1}+I_{y_1})}{(I_{x_2}+I_{y_1})+(I_{x_1}+I_{y_2})}\right]\frac{L}{2} \tag{2.14}$$

Siguiendo el modelo de cámara *Pin-Hole*, la proyección para transformar las coordenadas 3D de un punto P_i con referencia al sistema de coordenadas del entorno al sistema de coordenadas del PSD está definida por:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ f \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot (R \cdot P_i + T) \tag{2.15}$$

donde, (x_i, y_i, f) son la coordenada de la proyección del punto $P_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}$ en el plano imagen, λ_i es un factor de escala utilizado para pasar del sistema de coordenadas 3D del patrón al sistema de coordenadas 2D del plano imagen, *T* es el vector de traslación del sistema de referencia de la pseudocámara respecto al sistema de referencia del patrón, el mismo se representa matemáticamente en la ecuación (2.16).

$$T = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

R es la matriz de rotación del patrón que se encarga de rotar los ejes de coordenadas del entorno para hacerlo coincidir con el sistema de coordenadas de la cámara. Utilizando los ángulos de Euler, con el sentido de rotación $R_{ZYX} = R_z(\gamma), R_y(\beta), R_x(\alpha)$, descrito en (Craig 2006), la matriz de rotación R queda definida de la siguiente manera:

$$R_{ZYX} = R_z(\gamma), R_y(\beta), R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} cos\gamma & -sin\gamma & 0 \\ sin\gamma & cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\beta & 0 & sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\beta & 0 & cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Realizando la multiplicación de la ecuación (2.17) se obtiene la expresión (2.18) que se muestra a continuación:

$$R_{zyx}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} cos\gamma cos\beta & cos\gamma sin\beta sin\alpha - sin\gamma cos\alpha & cos\gamma sin\beta cos\alpha + sin\gamma sin\alpha \\ sin\gamma cos\beta & sin\gamma sin\beta sin\alpha + cos\gamma cos\alpha & sin\gamma sin\beta cos\alpha - cos\alpha sin\alpha \\ -sin\beta & cos\beta sin\alpha & cos\beta cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Siendo γ, β, α las rotaciones en los ejes z, y, x respectivamente. Sus valores se pueden calcular a partir de la matriz R mediante las ecuaciones:

$$\gamma = atan2\left(\frac{r_{21}}{cos(\beta)}, \frac{r_{11}}{cos(\beta)}\right) \quad (2.19)$$

$$\beta = atan2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \quad (2.20)$$

$$\alpha = atan2\left(\frac{r_{32}}{\cos(\beta)}, \frac{r_{33}}{cos(\beta)}\right) \quad (2.21)$$

Primeramente para obtener el modelo geométrico de la pseudocámara se rota y traslada el punto del entorno, como se muestra en la expresión (2.22).

$$\begin{pmatrix} X_{PSD} \\ Y_{PSD} \\ Z_{PSD} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Resolviendo este sistema, se obtienen las coordenadas del punto respecto al sistema de coordenadas del PSD, las cuales están definidas por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} X_{PSD} = r_{11}X_i + r_{12}Y_i + r_{13}Z_i + T_x \\ Y_{PSD} = r_{21}X_i + r_{22}Y_i + r_{23}Z_i + T_y \\ Z_{PSD} = r_{31}X_i + r_{32}Y_i + r_{33}Z_i + T_z \end{cases} \quad (2.23)$$

Las coordenadas del punto en el plano imagen están definidas por las ecuaciones que se muestran a continuación:

$$\begin{cases} x_i = f\,\frac{X_{PSD}}{Z_{PSD}} \\ y_i = f\,\frac{Y_{PSD}}{Z_{PSD}} \end{cases} \quad (2.24)$$

Sustituyendo (2.23) en (2.24) queda:

$$\begin{cases} x_i = f\,\dfrac{r_{11}X_i+r_{12}Y_i+r_{13}Z_i+T_x}{r_{31}X_i+r_{32}Y_i+r_{33}Z_i+T_z} \\ y_i = f\,\dfrac{r_{21}X_i+r_{22}Y_i+r_{23}Z_i+T_y}{r_{31}X_i+r_{32}Y_i+r_{33}Z_i+T_z} \end{cases} \tag{2.25}$$

Teniendo en cuenta el error que se puede cometer por imperfecciones en la construcción de la pseudocámara, pues el sensor arroja las coordenadas eléctricas respecto a su centro eléctrico, y que la lente también posee un centro óptico, se debe considerar la opción de que ambos centros no coincidan, como se muestra en la Figura 2.12.

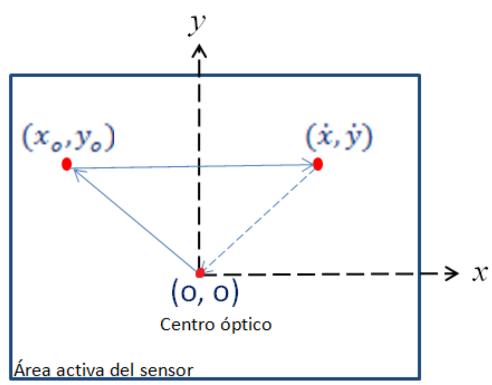

Figura 2.12. Error de la no alineación del centro óptico con el centro del sensor.

Donde (x_o, y_o) son las coordenadas del punto respecto al centro óptico y $(\dot{x}, \dot{y})$ las coordenadas eléctricas. Las ecuaciones para eliminar dicho error son las que se muestran a continuación:

$$\begin{cases} x_i = (\dot{x} - x_o) \\ y_i = (\dot{y} - y_o) \end{cases} \tag{2.26}$$

Despejando $\dot{x}$ y $\dot{x}$ de 2.26 se obtienen las coordenadas del punto en el plano imagen del sensor, siendo este el modelo lineal de la pseudocámara expresado matemáticamente en la expresión 2.27.

$$\begin{cases} \dot{x} = x_o + f\,\dfrac{r_{11}X_i+r_{12}Y_i+r_{13}Z_i+T_x}{r_{31}X_i+r_{32}Y_i+r_{33}Z_i+T_z} \\ \dot{y} = y_o + f\,\dfrac{r_{21}X_i+r_{22}Y_i+r_{23}Z_i+T_y}{r_{31}X_i+r_{32}Y_i+r_{33}Z_i+T_z} \end{cases} \tag{2.27}$$

En el modelo *geométrico de cámara* es necesario considerar las dimensiones de un pixel en los ejes ‘x’ e ‘y’ para la conversión de coordenadas métricas a coordenadas pixélicas. Sin embargo, para el caso de la pseudocámara, cuando se lleva de coordenadas métricas a coordenadas eléctricas no es necesario considerar dichas distancias ya que se trabaja con un PSD. El cual arroja las coordenadas en función de sus corrientes eléctricas, la incidencia del haz de luz es puntual por el efecto de la lente y su área de trabajo se considera como un solo píxel.

Introduciendo en la ecuación (2.26) el error que se puede cometer a la hora de determinar las coordenadas 'x' e 'y' de la proyección de un punto en el plano imagen, quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x_i = (\dot{x} - x_o + e_x) \\ y_i = (\dot{y} - y_o + e_y) \end{cases} \tag{2.28}$$

siendo e_x y e_y el error que se comete en los ejes 'x' e 'y' respectivamente.

Como la pseudocámara cuenta con una lente, incluyéndole a la ecuación (2.28) la distorsión óptica provocada por la misma, se obtiene la expresión 2.29.

$$\begin{cases} x_i = (\dot{x} - x_o + e_x) - do_x \\ y_i = (\dot{y} - y_o + e_y) - do_y \end{cases} \tag{2.29}$$

Donde do_x y do_y son las componentes de distorsión óptica de la lente en los ejes 'x' e 'y' respectivamente. Las cuales a su vez constan de dos componentes: do_r producto de la distorsión radial y do_t por la distorsión tangencial, como se muestra en la expresión a continuación:

$$\begin{cases} do_x = do_{xr} + do_{xt} \\ do_y = do_{yr} + do_{yt} \end{cases} \tag{2.30}$$

Introduciendo los modelos matemáticos basados en polinomios, que comúnmente se utilizan en fotogrametría, las componentes de distorsión radial y tangencial se representan por:

$$\begin{cases} do_{xr} = (\dot{x} - x_o)(a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6) \\ do_{yr} = (\dot{y} - y_o)(a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6) \end{cases} \tag{2.31}$$

y

$$\begin{cases} do_{xt} = p_1[r^2 + 2(x - x_o)^2] + 2p_2(\dot{x} - x_o)(\dot{y} - y_o) \\ do_{yt} = p_2\left[r^2 + 2(\dot{y} - y_o)^2\right] + 2p_1(\dot{x} - x_o)(\dot{y} - y_o) \end{cases} \tag{2.32}$$

siendo a_1, a_2 y a_3 los coeficientes del polinomio que modela la distorsión radial, p_1 y p_2 los coeficientes del polinomio que modela la distorsión tangencial y

$r = \sqrt{(\dot{x} - x_o)^2 + (\dot{y} - y_o)^2}$ la distancia radial entre un punto y el punto principal. Para pequeñas variaciones de *r* se producen cambios elevados en las componentes de distorsión radial, debido a que se encuentra elevado a la segunda, cuarta y sexta potencia.

Siguiendo el modelo explicado en el Anexo 1, se define $f_x = \frac{f}{dx}$ y $f_y = \frac{f}{dy}$, donde f_x y f_y son las distancias focales de un píxel analizado corrido del centro de la imagen.

En este caso, que se trabaja con un PSD; como se explicó anteriormente; se consideran las variables unitarias, por lo que $f_x = f_y = f$, sustituyendo en (2.29) se obtiene la expresión 2.33.

$$\begin{cases} \dot{x} + e_x = x_0 + do_x + f\frac{r_{11}X_i + r_{12}Y_i + r_{13}Z_i + T_x}{r_{31}X_i + r_{32}Y_i + r_{33}Z_i + T_z} \\ \dot{y} + e_y = y_0 + do_y + f\frac{r_{21}X_i + r_{22}Y_i + r_{23}Z_i + T_y}{r_{31}X_i + r_{32}Y_i + r_{33}Z_i + T_z} \end{cases} \tag{2.33}$$

Poniendo la expresión 2.33 en función de los errores se obtienen las funciones P y Q, las cuales serán las funciones de coste, que mediante un método iterativo, permitirá obtener los parámetros optimizados. En la expresión 2.34 se muestran dichas funciones.

$$\begin{cases} e_x = x_0 + do_x + f\frac{r_{11}X_w + r_{12}Y_w + r_{13}Z_w + T_x}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + T_z} - \dot{x} = P(\emptyset) \\ e_y = y_0 + do_y + f\frac{r_{21}X_w + r_{22}Y_w + r_{23}Z_w + T_y}{r_{31}X_w + r_{32}Y_w + r_{33}Z_w + T_z} - \dot{y} = Q(\emptyset) \end{cases} \tag{2.34}$$

donde $\emptyset = [u_o, v_o, a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, f, T_x, T_y, T_z, \alpha, \beta, \gamma]^T$ es un vector que contiene 9 parámetros intrínsecos (característicos de la cámara y la lente) y 6 parámetros extrínsecos (posición geométrica relativa entre el patrón y la cámara).

2.7 Calibración de la pseudocámara.

El proceso de calibración es de vital importancia en aplicaciones donde se desea obtener algún tipo de medida en el entorno a partir de una imagen 2D. Un ejemplo de interés es el caso de la localización de un robot a partir de la imagen captada por una o varias cámaras, según la técnica de localización empleada.

La calibración geométrica del PSD consiste en obtener tanto los parámetros extrínsecos como intrínsecos que definen el modelo del sistema PSD-Lente; de forma que sea posible calcular la coordenada (X,Y) de un punto en el entorno, a parir de dichos parámetros con el menor error posible.

El método empleado en este trabajo es el método de Zhang, el mismo plantea su calibración en la observación de una plantilla desde varias posiciones; donde se conocen previamente las coordenadas de los puntos; y se basa en la obtención de los parámetros mediante las homografías de cada imagen. En este, para la calibración de la pseudocámara se divide el proceso en dos etapas fundamentales.

En la primera etapa se obtienen los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la pseudocámara. Posteriormente en la segunda etapa se refinan los parámetros obtenidos mediante un método iterativo. Para la obtención de los parámetros iniciales se estructura el proceso como se muestra a continuación:

2.7.1 Calculo de la Homografía.

Para la estimación de la homografía se parte del modelo de la pseudocámara, el cual plantea que la proyección de un punto del entorno en el plano imagen del sensor está determinada por su rotación y traslación, expresado matemáticamente en la expresión (2.35), la misma es una ecuación general de la ecuación (2.15):

$$p_i = M_{3x4} \cdot P_i \tag{2.35}$$

Donde M es el producto de la matriz de parámetros intrínsecos A y la matriz de parámetros extrínsecos $[R\ t]$. Por lo que la ecuación (2.35) se puede escribir de la siguiente forma:

$$p_i = A \cdot [R\ t] \cdot P_i \tag{2.36}$$

La matriz *A,* está conformada por los parámetros *(*$\alpha_y = f \cdot d_x$*),* *(*$\alpha_x = f \cdot d_y$*)* que son factores de escala donde d_x y d_y se eliminan, como se explica en la sesión 2.6 y γ representa la pérdida de ortogonalidad entre los ejes en la imagen.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_x & \gamma & x_o \\ 0 & \alpha_y & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Como el método asume que el sistema de coordenadas del mundo real se adapta a la propia plantilla, los puntos P_i de la escena que se van a utilizar para realizar la calibración están colocados de forma que su coordenada $z = 0$. El modelo se reduce eliminando la componente z. Definiendo los vectores columna de la matriz de rotación como $R = [r1\, r2\, r3]$, el modelo queda expresado de la siguiente forma:

$$p_i = A \cdot [R\ t] \cdot P_i = A \cdot [r_1\ r_2\ r_3\ t] \cdot P_i = A \cdot [r_1\ r_2\ \ t] \cdot P_i \tag{2.38}$$

Es decir se transforma el modelo inicial en una homografía *H* que relaciona los puntos de la plantilla plana del escenario con sus correspondientes en la imagen,

$$p_i = H \cdot P_i \tag{2.39}$$

Siendo

$$H = A \cdot [r_1\ \ r_2\ \ t] = A \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & t_x \\ r_{12} & r_{22} & t_y \\ r_{13} & r_{23} & t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Para estimar una homografía a partir de una plantilla bidimensional, el razonamiento es parecido al realizado hasta el momento. Las coordenadas de un punto $p_i = (x_i, y_i)$ en la imagen se calculan a partir de la posición de su correspondiente en la escena $P_i = (X_i,\ Y_i)$ y de los elementos que forman la homografía según las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} x_i = \frac{h_{11}X_i + h_{12}Y_i + h_{13}}{h_{31}X_i + h_{32}Y_i + h_{33}} \\ y_i = \frac{h_{21}X_i + h_{22}Y_i + h_{23}}{h_{31}X_i + h_{32}Y_i + h_{33}} \end{cases} \tag{2.41}$$

Reordenando las ecuaciones (2.41), para cada posición conocida de un punto en la plantilla $P_i = (X_i,\ Y_i)$ y su correspondiente en la imagen $p_i = (x_i, y_i)$, se pueden obtener dos ecuaciones con 9 incógnitas, que corresponden a los elementos de la homografía.

$$\begin{cases} u_i(h_{31}X_i + h_{32}Y_i + h_{33}) = h_{11}X_i + h_{12}Y_i + h_{13} \\ v_i(h_{31}X_i + h_{32}Y_i + h_{33}) = h_{21}X_i + h_{22}Y_i + h_{23} \end{cases} \tag{2.42}$$

Si se tiene disponibles *n* puntos, se puede obtener un sistema lineal de *2·n* ecuaciones con 9 incógnitas de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1 \cdot X_1 & -x_1 \cdot Y_1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & 1 & -Y_1 \cdot Y_1 & -x_1 \cdot Y_1 & -y_1 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ X_n & Y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_n \cdot X_n & -x_n \cdot Y_n & -x_n \\ 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & 1 & -y_n \cdot X_n & -y_n \cdot Y_n & -y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ .. \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.43}$$

El sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma matricial como:

$$A \cdot h = 0 \tag{2.44}$$

Donde *A* en este caso, es la matriz de dimensión (2·*n*) x 9 que contiene las coordenadas de los puntos en la plantilla y sus correspondientes posiciones de las proyecciones en la imagen, todas ellas conocidas, *h* es un vector que contiene todos los elementos de la homografía *H* colocados en un vector, como se muestra a continuación.

$$h = [h_{11}\ h_{12}\ h_{13}\ h_{21}\ h_{22}\ h_{23}\ h_{31}\ h_{32}\ h_{33}\ ] \tag{2.45}$$

Para obtener los elementos de la homografía *h*, dado que la solución *h=0* no tiene interés, se impone la restricción |*h*|=1. Un vector *h* que sea solución de la expresión (2.44), y cualquier otro vector *k·h* son igual de válidos, ya que *h*, está definido con un factor de escala.

Por lo tanto, ya que no hay una solución exacta para solución para *A·h=0*, se puede minimizar la norma de |*A·h*| sujeta a la restricción |*h*|=1. La solución *h* es el vector propio unitario de la matriz $A^T \cdot A$ asociado al valor propio más pequeño. Este vector se pude obtener a partir de la descomposición en valores propios de la matriz $A^T \cdot A$.

2.7.2 Cálculo de la matriz cónica B.

Para poder hallar la matriz de parámetros intrínsecos A es necesario introducir un nuevo concepto: la "cónica absoluta", *B*. La "cónica absoluta" se define como $B = A^T \cdot A^{-1}$. Por lo que si se conoce *B* se puede obtener la matriz de parámetros intrínsecos *A***,** a partir de ella.

Como *B* es el producto de una matriz por su transpuesta, se trata de una matriz simétrica de *3x3* que se puede definir con un vector de 6 elementos de la forma:

$$b = [b_{11}\ b_{12}\ b_{22}\ b_{13}\ b_{23}\ b_{33}\ ] \tag{2.46}$$

Dado que *R* es una matriz de rotación, los vectores que la componen cumplen las restricciones de ortonormalidad, es decir:

$$r_1^T \cdot r_1 = r_2^T \cdot r_2 \qquad r_1^T \cdot r_2 = 0 \tag{2.47}$$

Despejando los vectores de rotación ($r_1\ y\ r_2$) de la ecuación (2.40) y se sustituye su valor en las restricciones de la ecuación (2.47), se obtienen las dos restricciones básicas dada una homografía:

$$h_1^T \cdot A^{-T} \cdot A^{-1} \cdot h_1 = h_2^T \cdot A^{-T} \cdot A^{-1} \cdot h_2 \qquad h_1^T \cdot A^{-T} \cdot A^{-1} \cdot h_2 = 0 \tag{2.48}$$

Siendo h_i la i-ésima columna de la homografía *H*.

Escribiendo el producto $h_i^T \cdot A^{-T} \cdot A^{-1} \cdot h_i$ en función de la cónica absoluta se tiene:

$$h_i^T \cdot B \cdot h_i = v_{ij}^T \cdot b \quad (2.49)$$

donde:

$$v_{ij} = [h_{1i} \cdot h_{1j};\ h_{1i} \cdot h_{2j} + h_{2i} \cdot h_{1j};\ h_{2i} \cdot h_{2j};\ h_{3i} \cdot h_{1j} + h_{1i} \cdot h_{3j};\ h_{2i} \cdot h_{3j} + h_{3i} \cdot h_{2j};\ h_{3i} \cdot h_{3j}]^T \quad (2.50)$$

Las restricciones de la ecuación (2.48) se pueden escribir en función de v_{ij} y de *b* mediante dos ecuaciones homogéneas:

$$\begin{bmatrix} v_{12}^T \\ v_{11}^T \cdot v_{22}^T \end{bmatrix} \cdot b = 0 \quad (2.51)$$

Por cada imagen utilizada se obtienen dos ecuaciones homogéneas como las de la ecuación (2.51). Con las restricciones de *n* homografías correspondientes a *n* imágenes, (n ≥ 3), se obtiene un sistema de *2n* ecuaciones:

$$V \cdot b = 0 \quad (2.52)$$

Donde la solución es el vector propio de $V^T \cdot V$ asociado al valor propio más pequeño.

2.7.3 Calculo de los parámetros intrínsecos.

Una vez conocido el vector *b* se pueden obtener los valores de la matriz de parámetros intrínsecos; conformada por las coordenadas del centro óptico y la distancia focal; las expresiones que determinan estos valores se muestran a continuación:

$$v_o = \left(\frac{b_2 \cdot b_4 - b_1 \cdot b_5}{b_1 \cdot b_3 - b_2^2}\right) \quad (2.53)$$

$$\lambda = b_6 - \frac{(b_4^2 + v_o(b_2 \cdot b_4 - b_1 \cdot b_5))}{b_1} \quad (2.54)$$

$$\alpha_u = \sqrt{\frac{\eta}{b_1}} \quad (2.55)$$

$$\alpha_v = \sqrt{\frac{\lambda \cdot b_1}{(b_1 \cdot b_3 - b_2^2)}} \quad (2.56)$$

$$\gamma = \frac{-b_2 \cdot {\alpha_u}^2 \cdot {\alpha_v}^2}{\lambda} \quad (2.57)$$

$$u_o = \frac{\gamma \cdot v_o}{\alpha_u} - \frac{b_4 \cdot {\alpha_v}^2}{\lambda} \quad (2.58)$$

2.7.4 Cálculo de los parámetros extrínsecos.

Una vez obtenidos los parámetros intrínsecos se forma la matriz A mediante la cual se determinan los parámetros extrínsecos a partir de las expresiones siguientes:

$$r_1 = \lambda \cdot A^{-1} \cdot h_1 \tag{2.59}$$

$$r_2 = \lambda \cdot A^{-1} \cdot h_2 \tag{2.60}$$

$$r_3 = r_1 \; x \; r_2 \tag{2.61}$$

$$t = \lambda \cdot A^{-1} \cdot h_3 \tag{2.62}$$

Donde r_1, r_2, r_3 y t son los vectores columna de la matriz $[R\ t]$.

2.7.5 Optimización de parámetros empleando métodos iterativos.

Para la optimización se tienen en cuenta parámetros que no tienen un comportamiento lineal. La optimización se realiza mediante técnicas iterativas, donde la obtención de los parámetros se realiza de forma matemática, en función de minimizar lo más posible el error que se pueda cometer a la hora de determinar las coordenadas de la proyección de un punto en el PSD.

Para realizar la optimización a través de técnicas iterativas, se emplean como función de coste las ecuaciones que definen el modelo no lineal del sistema PSD-Lente, mostrado en (2.34).

Como se puede observar en el modelo (2.34) cada punto aporta dos ecuaciones y 16 incógnitas. Ahora el número de incógnitas aumenta, ya que además de incorporar el efecto no lineal de la lente, también se incorpora las dimensiones L_x, L_y del área activa del PSD.

La idea en este paso es minimizar los errores que se cometen en la determinación de la coordenada $(x_i;\ y_i)$ de la proyección de P_i en el PSD para cada punto del patrón. Entonces, la función a minimizar será la suma de los cuadrados de los errores para los *n* puntos del patrón, como se muestra en la expresión 2.63.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(e_{x_i}^2 + e_{y_i}^2\right) \tag{2.63}$$

Donde las ecuaciones que definen los errores (e_x, e_y) son las funciones de coste expresadas en 2.34.

Para ello, se define un vector de parámetros, que es el vector Φ que contiene a todas las incógnitas de este sistema:

$$\Phi = [x_0;\ y_0;\ L_x;\ L_y;\ a_1;\ a_2;\ a_3;\ p_1;\ p_2;\ f;\ \alpha;\ \beta;\ \gamma;\ T_x;\ T_y;\ T_z]^T \tag{2.64}$$

Dichos parámetros se deben de inicializar con valores lo más aproximado posible a los reales para garantizar que el método iterativo converja en el menor número de iteraciones al mínimo de la función. En este caso los valores iniciales de los parámetros ($x_0;\ y_0;\ f;\ T_x;\ T_y;\ T_z;\ \alpha;\ \beta;\ \gamma$) serán los obtenidos al aplicar el método de Zhang. Los coeficientes de los polinomios que describen la distorsión de la lente (a_1, a_2, a_3, p_1, p_2) se igualarán a cero, ya que además de ser pequeños, se desea minimizarlos. En el caso de las dimensiones del área activa del PSD (L_x, L_y) se asignaran los valores dados por el fabricante.

CAPITULO 3 . Simulación y análisis de los resultados.

En el presente capítulo se realizan simulaciones para evaluar la eficiencia del método de calibración explicado en el Capítulo 2, utilizando el software Matlab versión R2014a. Para ello se realiza la calibración partiendo de las proyecciones del patrón en el plano imagen, primeramente libre de distorsión óptica provocada por la lente y luego considerando este efecto. Posteriormente se realiza un experimento, que consiste en sumarle a las proyecciones con distorsión óptica un error, el cual es el valor medio cuadrático, sigma (σ), obtenido de una práctica real con la pseudocámara.

3.1 Generación del patrón a utilizar en la calibración.

Como el método de Zhang basa su calibración en imágenes de una plantilla; donde las coordenadas de los puntos de la misma son conocidas; el primer paso para la comprobación del método es la creación del patrón. El patrón está conformado por 12 puntos, ya que el mismo debe tener como mínimo 9 puntos para que el sistema de ecuaciones conformado en el cálculo de las coordenadas de los puntos tenga solución, ya que el vector que contiene todos los parámetros a optimizar definido en la expresión 2.63, define la cantidad de incógnitas. Las coordenadas de los puntos utilizados se muestran a continuación en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Coordenadas de los puntos en el patrón.

Puntos	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Coordenada x(mm)	*100*	*150*	*200*	*250*	*100*	*150*	*200*	*250*	*100*	*150*	*200*	*250*
Coordenada y(mm)	*100*	*100*	*100*	*100*	*150*	*150*	*150*	*150*	*200*	*200*	*200*	*200*

A continuación se muestra el patrón a utilizar con los puntos antes mencionados.

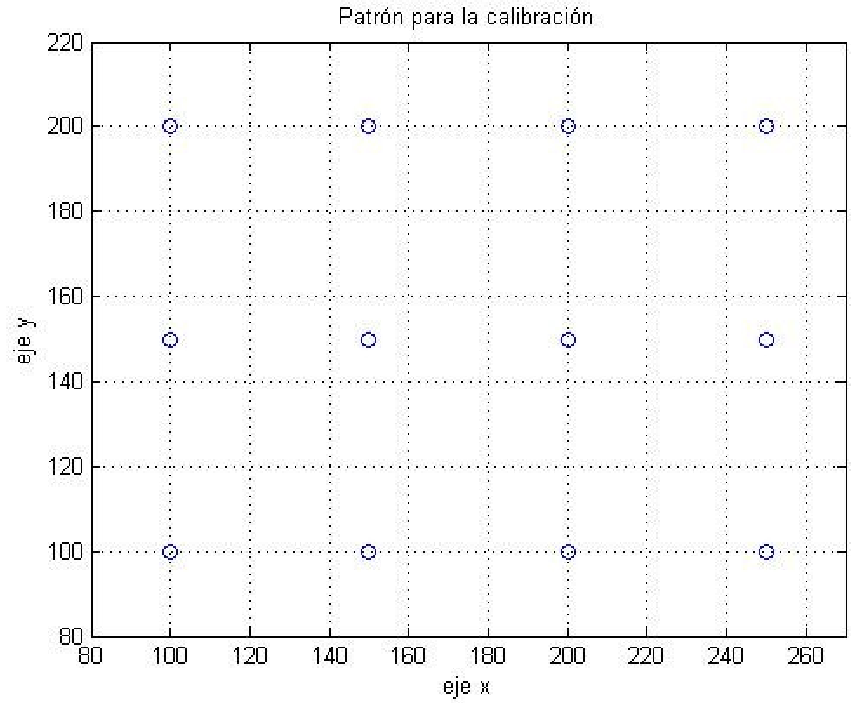

Figura 3.1. Patrón a utilizar en la calibración.

3.2 Resultados de la proyección de los puntos en el PSD sin incluir la distorsión óptica.

Para la obtención de las proyecciones de los puntos situados en el patrón se utilizaron los parámetros que se muestran en la Tabla 3.2. En la misma se hace referencia al uso de las tres imágenes necesarias para la calibración mediante el método de Zhang, donde, cada una de ellas difiere en sus parámetros extrínsecos, que son los que determinan la posición del patrón, pues como el método se basa en la observación del patrón desde varias posiciones los parámetros intrínsecos no varían. Todos los parámetros están expresados en milímetros y los ángulos de rotación *gamma, beta y alpha* en grados.

Tabla 3.2. Parámetros utilizados para la proyección de los puntos.

Intrínsecos			
$x_0(mm)$	-0.5		
$y_0(mm)$	-0.3		
$f(mm)$	20		
Extrínsecos	Imagen 1	Imagen 2	Imagen 3
$gamma\ (\gamma)$	55^o	20^o	0^o
$beta\ (\beta)$	35^o	0^o	25^o
$alpha\ (\alpha)$	10^o	45^o	60^o
$T_x(mm)$	110	-120	-240
$T_y(mm)$	-230	-190	-150
$T_z(mm)$	1200	1600	900

A continuación se muestran las proyecciones de los puntos en el plano imagen del PSD utilizando los parámetros correspondientes a la Tabla 3.1 correspondiente a tres imágenes sin incluir la distorsión óptica.

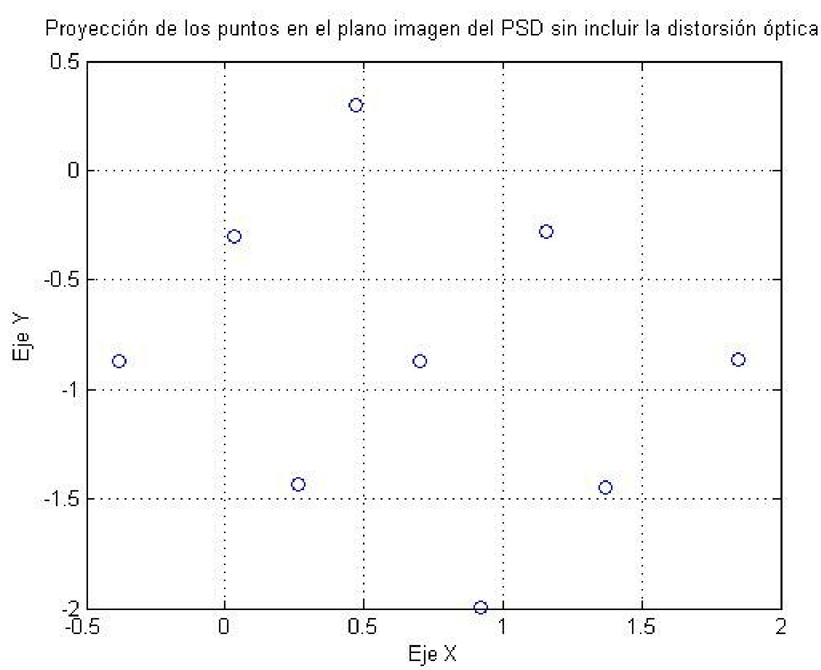

Figura 3.2. Proyección del patrón en el plano imagen del PSD sin incluir la distorsión óptica correspondiente a la Imagen 1.

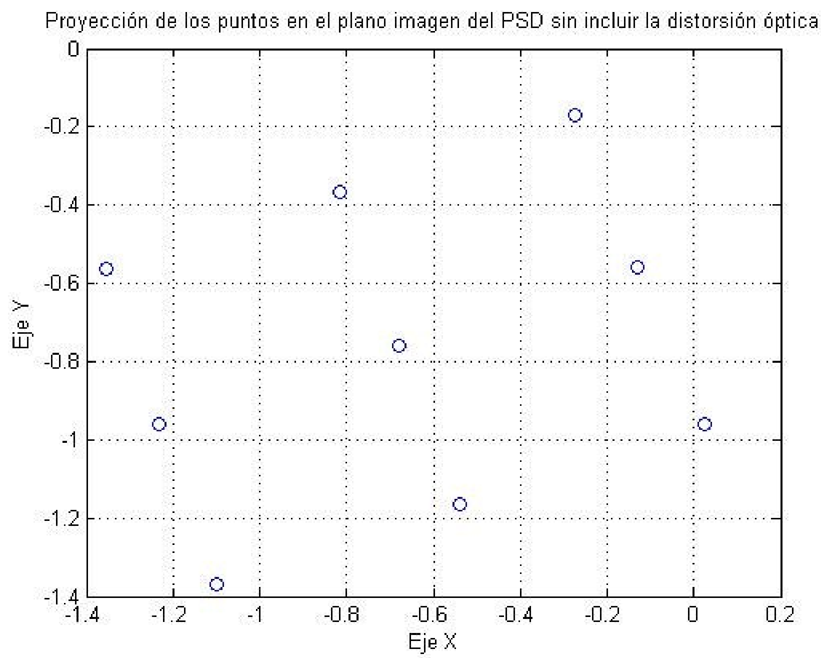

Figura 3.3. Proyección del patrón en el plano imagen del PSD sin incluir la distorsión óptica correspondiente a la Imagen 2.

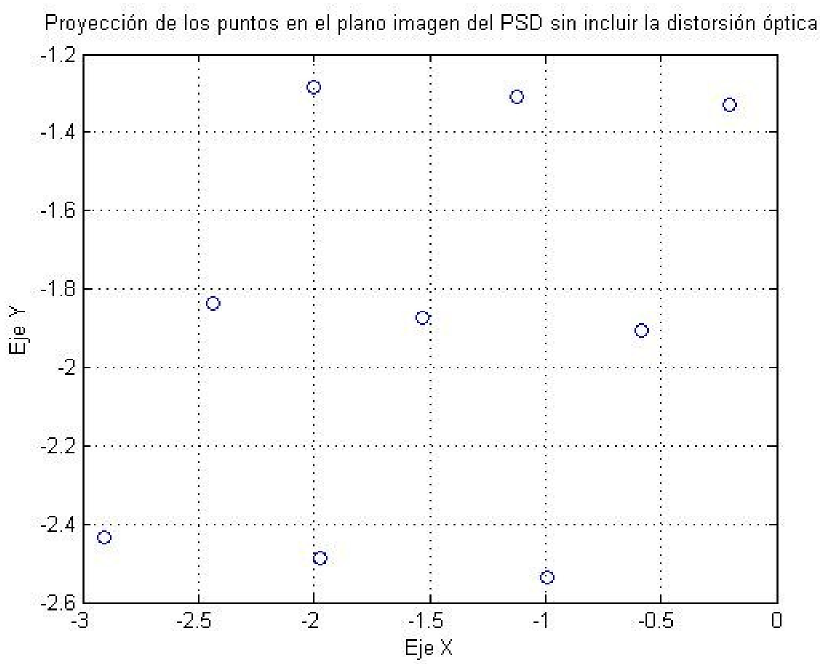

Figura 3.4 Proyección del patrón en el plano imagen del PSD sin incluir la distorsión óptica correspondiente a la Imagen 3.

3.2.1 Resultados de la calibración.

Una vez proyectados los puntos y realizada la calibración se obtuvieron los parámetros optimizados mostrados en la Tabla 3.3. Como se puede observar los parámetros obtenidos son aceptables, si se tiene en cuenta que el método trata de obtener los parámetros optimizados de los utilizados en la proyección de los puntos del patrón.

Tabla 3.3. Parámetros optimizados obtenidos de la calibración.

Intrínsecos			
$x_0(mm)$	*-0.5000*		
$y_0(mm)$	*-0.3000*		
$f(mm)$	*20.0000*		
Extrínsecos	*Imagen 1*	*Imagen 2*	*Imagen 3*
$gamma\ (\gamma)$	55.0000^o	20.0000^o	0^o
$beta\ (\beta)$	35.0000^o	0^o	25.0000^o
$alpha\ (\alpha)$	10.0000^o	45.0000^o	60.0000^o
$T_x(mm)$	*110.0000*	*-120.0000*	*-240.0000*
$T_y(mm)$	*-230.0000*	*-190.0000*	*-150.0000*
$T_z(mm)$	*1200.0000*	*1600.0000*	*900.0000*

Con la obtención de los parámetros se calcularon las coordenadas de los puntos del patrón obteniendo los resultados mostrados en la Tabla 3.4. En la Figura 3.5 se muestra la regeneración del patrón partiendo de las coordenadas calculadas.

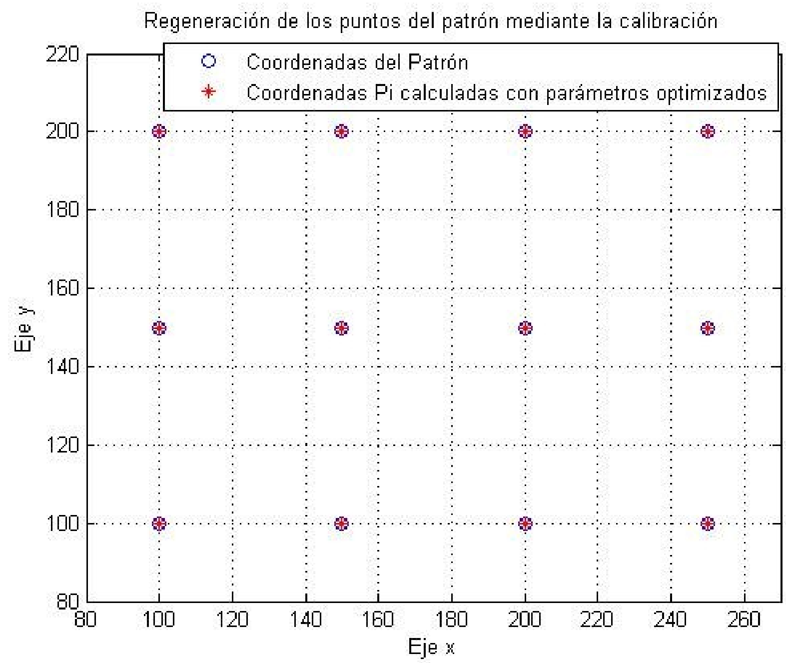

Figura 3.5. Representación del patrón con las coordenadas de los puntos calculados por la calibración.

En la Figura 3.5 se han representado los puntos del patrón de coordenadas conocidas y los puntos con coordenadas obtenidas luego de la calibración. A simple vista se observa que las coordenadas calculadas coinciden perfectamente con las conocidas, sin embargo existe un pequeño error asociado a cada coordenada, el cual se muestra en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4. Error asociado al cálculo de las coordenadas de los puntos del patrón.

Puntos		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Coordenadas Conocidas (mm)	x	100	150	200	250	100	150	200	250	100	150	200	250
	y	100	100	100	100	150	150	150	150	200	200	200	200
Coordenadas Calculadas (mm)	x	100.00	150.00	200.00	250.00	100.00	150,00	200.00	250.00	100.00	150.00	200.00	250.00
	y	100.00	100.00	100.00	100.00	150.00	150.00	150.00	150.00	200.00	200.00	200.00	200.00
Error (mm)		$7x10^{-11}$	$1x10^{-10}$	$3x10^{-10}$	$4x10^{-10}$	$3x10^{-11}$	$1x10^{-10}$	$2x10^{-10}$	$4x10^{-10}$	$2x10^{-11}$	$1x10^{-10}$	$2x10^{-10}$	$3x10^{-10}$

Este error que se obtiene al regenerar el patrón se puede despreciar pues como se puede observar es un valor pequeño, prácticamente cero, por lo que el resultado es aceptable.

3.3 Resultados de la proyección de los puntos en el PSD incluyendo la distorsión óptica.

En el presente trabajo se tiene en cuenta la distorsión óptica producida por la lente que tiene la pseudocámara, esta distorsión como se explica en la sección 2.7 tiene una componente tangencial y otra radial. En este caso se incluye la distorsión radial a la hora de proyectar los puntos en el plano imagen del PSD. En la Tabla 3.5 se muestran los valores utilizados para introducir la distorsión, donde $a_1, a_2 \; y \; a_3$ son los coeficientes del polinomio que modela la distorsión radial.

Tabla 3.5. Valores utilizados para modelar la distorsión radial.

Parámetro	a_1	a_2	a_3
Valor (mm)	$2 * 10^{-4}$	$3 * 10^{-4}$	$2 * 10^{-5}$

A continuación se muestran las proyecciones de los puntos del patrón en el plano imagen del PSD con el efecto de la distorsión incluida. Es importante hacer notar que la distorsión radial es más apreciable cuanto más alejado se está del centro eléctrico. Los valores utilizados son considerados de altos, los mismos se utilizaron para poder apreciar el efecto de estos sobre las proyecciones de los puntos y para determinar la eficiencia del método ante este tipo de fenómeno.

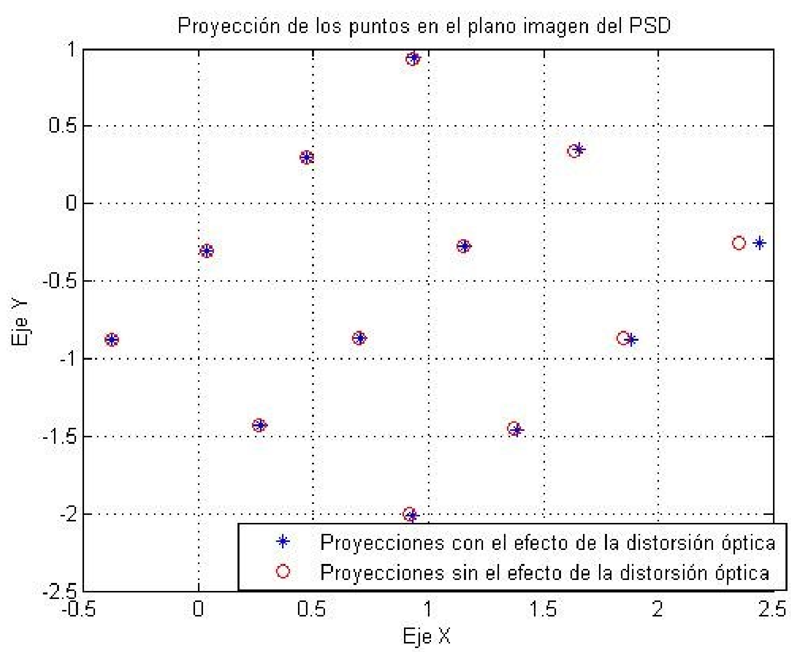

Figura 3.6. Proyección del patrón en el plano imagen del PSD con distorsión óptica correspondiente a la Imagen 1.

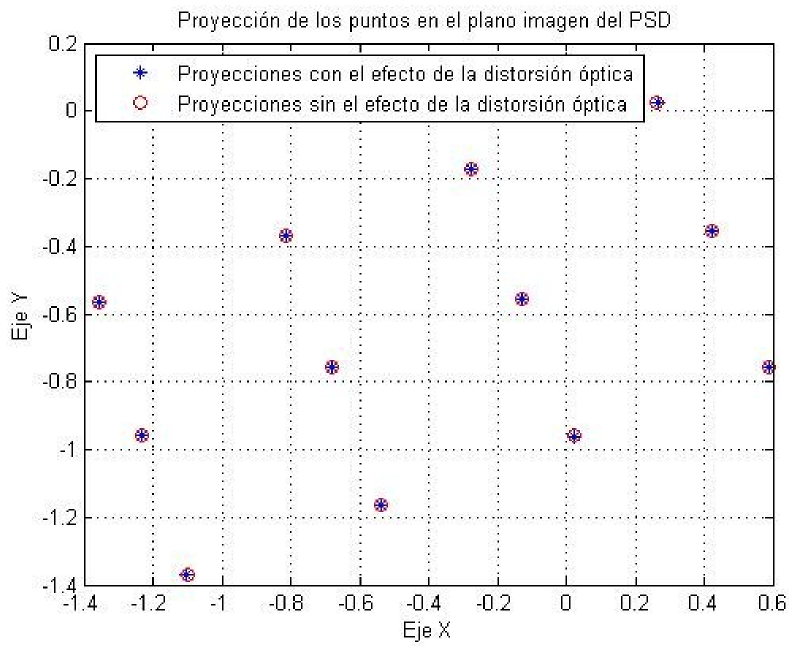

Figura 3.7. Proyección del patrón en el plano imagen del PSD con distorsión óptica correspondiente a la Imagen 2.

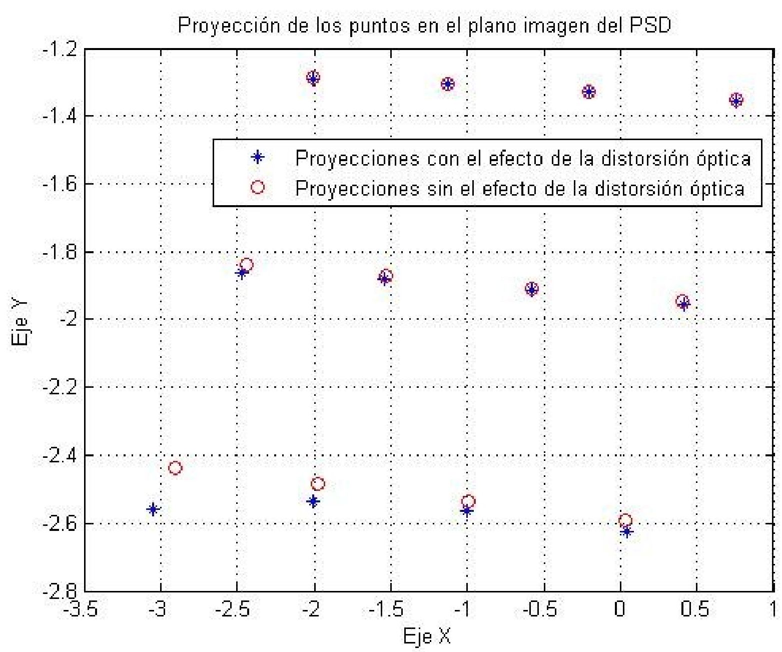

Figura 3.8. Proyección del patrón en el plano imagen del PSD con distorsión óptica correspondiente a la Imagen 3.

En las Figuras 3.6, 3.7 y 3.8 se han representado dos proyecciones, la señalada con círculos representa la proyección de los puntos del patrón libres de distorsión óptica y los representados con asteriscos son los puntos proyectados bajo el efecto de la distorsión óptica. En las mismas se pueden apreciar el efecto que produce en las proyecciones la inserción de la componente radial de la distorsión óptica producida por la lente. También se puede apreciar que su efecto es mayor en las coordenadas más alejadas del centro eléctrico.

3.3.1 Resultados de la calibración.

En la Tabla 3.6 se muestran los parámetros optimizados obtenidos de la calibración con el efecto de la distorsión óptica incluido.

Tabla 3.6. Parámetros optimizados obtenidos de la calibración.

Intrínsecos			
$x_0(mm)$	6.3343		
$y_0(mm)$	1.8702		
$f(mm)$	16.3943		
Extrínsecos	Imagen 1	Imagen 2	Imagen 3
$gamma\ (\gamma)$	46.5192^o	11.5665^o	-7.8567^o
$beta\ (\beta)$	35.8264^o	-37.4788^o	-2.0262^o
$alpha\ (\alpha)$	-3.9156^o	40.5948^o	67.8976^o
$T_x(mm)$	-248.6047	-631.8952	-518.4557
$T_y(mm)$	-306.5335	-301.6625	-182.7353
$T_z(mm)$	1055.0000	1458.0000	751.0000

Con la obtención de los parámetros optimizados se calcularon las coordenadas de los puntos del patrón obteniendo los resultados mostrados en la Tabla 3.7. En la Figura 3.9 se muestra la regeneración del patrón partiendo de las coordenadas calculadas.

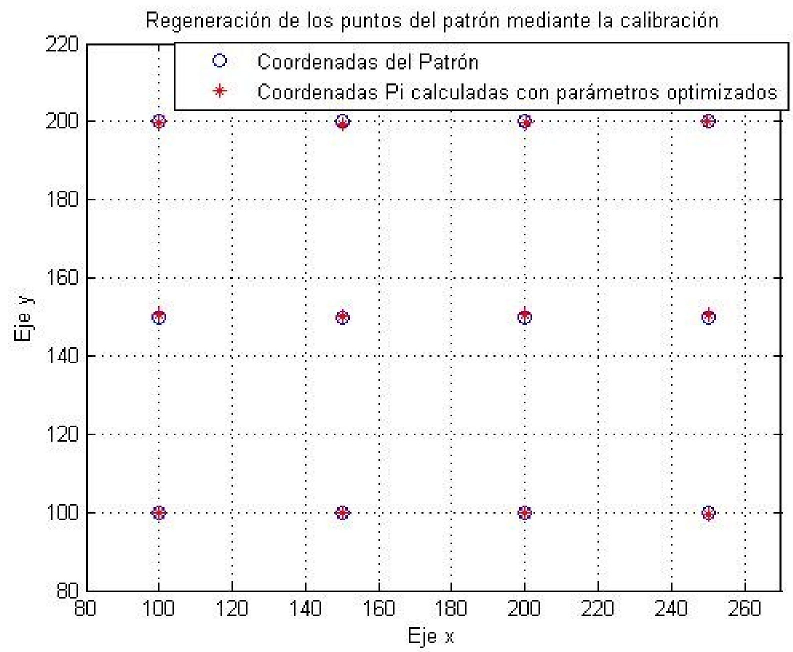

Figura 3.9. Representación del patrón con las coordenadas de los puntos calculados mediante la calibración con el efecto de la distorsión.

Como se puede apreciar en la Figura 3.9, las coordenadas obtenidas luego del proceso de calibración se ven afectadas por la distorsión óptica, siendo esta un factor clave en el error que se comete al regenerar el patrón con las coordenadas obtenidas luego de la calibración, este error se muestra en la Tabla 3.7. Es por ello que la elección del tipo de lente a utilizar en la pseudocámara sea un factor importante para la efectividad de la misma.

Tabla 3.7. Error asociado al cálculo de las coordenadas de los puntos del patrón con el efecto de la distorsión óptica.

Puntos		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Coordenadas Conocidas (mm)	x	100	150	200	250	100	150	200	250	100	150	200	250
	y	100	100	100	100	150	150	150	150	200	200	200	200
Coordenadas Calculadas (mm)	x	99,989	150.03	199,87	250,15	99,859	150,06	199,98	249,91	99.942	150.250	200.128	249.797
	y	99.947	99.781	99.953	99.522	150.65	150.26	150.46	150.44	199.57	199.43	199.85	200.09
Error (mm)		0,0537	0,2223	0,1318	0,5010	0,6745	0,2740	0,4620	0,4533	0,4296	0,6218	0,1974	0,2250

Observando la Tabla 3.7 se puede determinar que el efecto de la distorsión óptica influye en la determinación del cálculo de las coordenadas de los puntos del patrón, aumentado el error que se produce al efectuar la regeneración del patrón. Aunque se observa un aumento de este error se puede determinar que el mismo no tiene un gran efecto sobre las coordenadas calculadas, ya que el valor del error está cercano a cero.

3.4 Resultados de la calibración introduciendo el valor medio cuadrático.

El valor medio cuadrático; sigma (σ); es el error que se comete al proyectar un punto en el plano imagen y este pueda variar o tomar cualquier posición cercana al punto. Para estimar la desviación estándar, se partió de un esquema de trabajo real. Donde se tomaron 100 proyecciones de un único punto bajo las mismas condiciones en un PSD con un área activa de $9\ x\ 9\ mm$. Tras realizar el análisis estadístico correspondiente se obtuvo una desviación de σ = 0.003.

En el presente trabajo se realizan tres análisis, donde sigma toman valores de sigma, 3 sigma y 5 sigma. Insertando este error en la proyección de los puntos en conjunto con la distorsión óptica se puede determinar la eficiencia del método.

3.4.1 Para un valor de sigma.

En las siguientes figuras se muestran las proyecciones del patrón con el efecto de sigma.

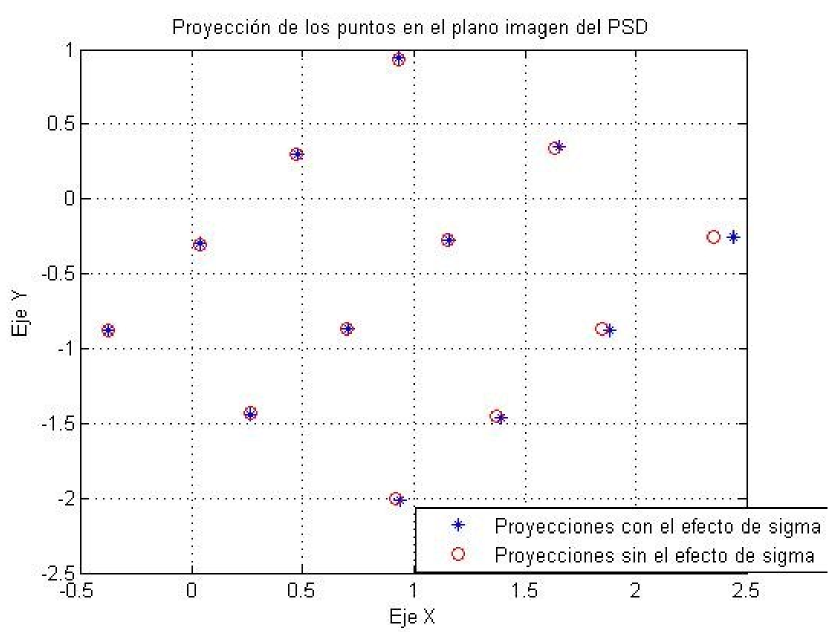

Figura 3.10. Proyección del patrón con el efecto sigma correspondiente a la Imagen 1.

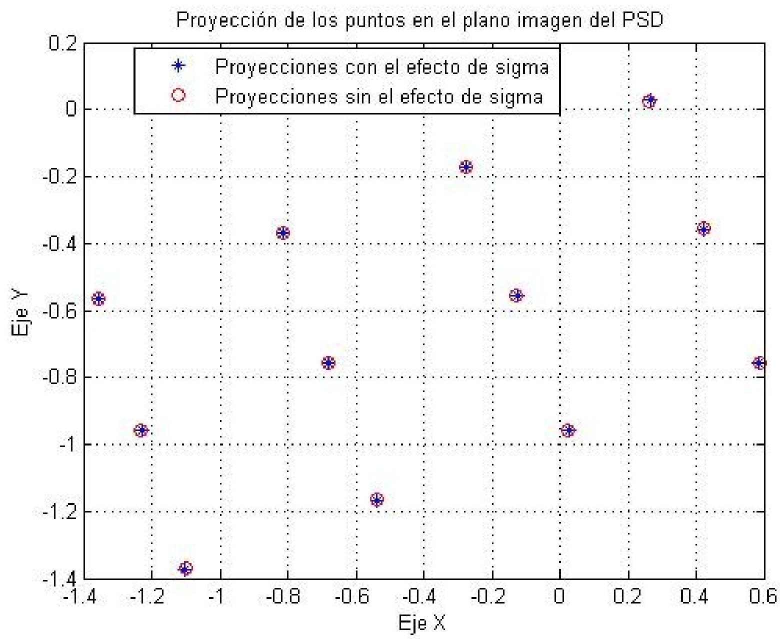

Figura 3.11. Proyección del patrón con el efecto de sigma correspondiente a la Imagen 2.

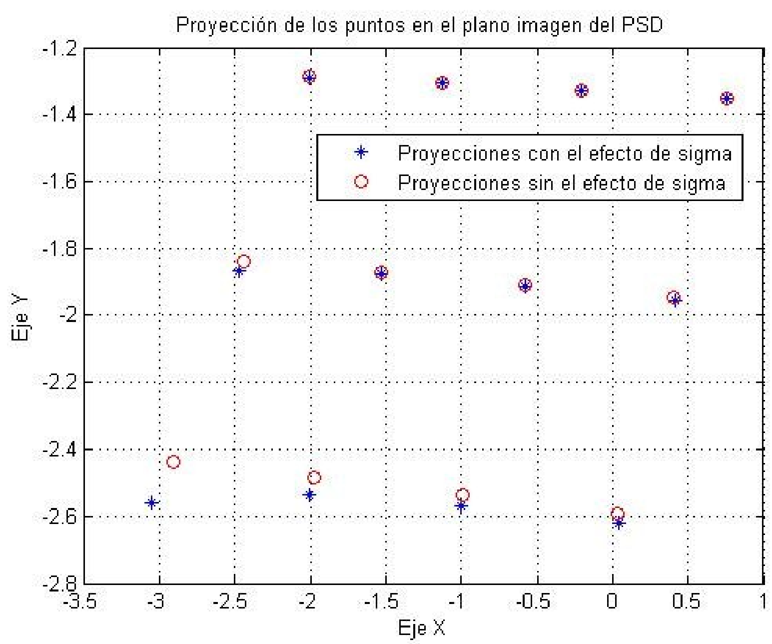

Figura 3.12. Proyección del patrón con el efecto de sigma correspondiente a la Imagen 3.

Una vez proyectados los puntos y realizada la calibración por el método se obtuvieron los parámetros optimizados mostrados en la Tabla 3.8.

Tabla 3.8. Parámetros optimizados obtenidos de la calibración para sigma.

Intrínsecos			
$x_0(mm)$	6.3400		
$y_0(mm)$	1.7332		
$f(mm)$	15.8761		
Extrínsecos	Imagen 1	Imagen 2	Imagen 3
$gamma\ (\gamma)$	$46{,}737^o$	$11{,}774^o$	$-8{,}513^o$
$beta\ (\beta)$	$36{,}114^o$	$-38{,}586^o$	$-2{,}900^o$
$alpha\ (\alpha)$	$-2{,}802^o$	$38{,}299^o$	$66{,}931^o$
$T_x(mm)$	-247,2892	-636,6487	-520,8504
$T_y(mm)$	-300,1968	-295,5820	-179,1963
$T_z(mm)$	1032,6856	1452,9132	747,6813

Con los parámetros optimizados obtenidos de la calibración se calcularon las coordenadas de los puntos del patrón obteniendo el resultado mostrado en la Figura 3.13.

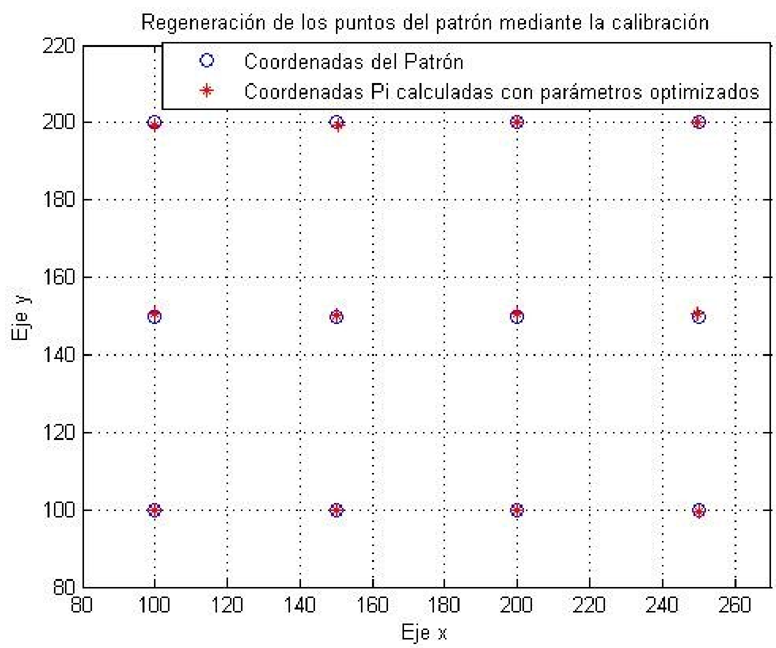

Figura 3.13. Patrón generado con las coordenadas de los puntos calculadas mediante los parámetros optimizados.

En la Figura 3.12 se puede observar que para sigma las coordenadas de los puntos del patrón sufren un pequeño error mostrado en la Tabla 3.9, el mismo es casi cercano a cero por lo que es poco perceptible, quedando en evidencia la efectividad del método ante un error practico.

Tabla 3.9. Error asociado al cálculo de las coordenadas de los puntos del patrón para sigma.

Puntos		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Coordenadas Conocidas (mm)	x	100	150	200	250	100	150	200	250	100	150	200	250
	y	100	100	100	100	150	150	150	150	200	200	200	200
Coordenadas Calculadas (mm)	x	99,910	149,99	199,81	250,26	100,02	150,12	200,07	249,75	99,726	150,361	200,223	249,730
	y	100,07	99,602	100,09	99,457	150,55	150,32	150,40	150,48	199,79	199,249	199,633	200,320
Error (mm)		0,0537	0,2223	0,1318	0,5010	0,6745	0,2740	0,4620	0,4533	0,4296	0,6218	0,1974	0,2250

De la Tabla 3.9 se puede concluir que para sigma, el método presenta una buena respuesta ante este error práctico, ya que el error asociado al cálculo de las coordenadas de los puntos del patrón, no supera el medio milímetro en la mayoría de los puntos.

3.4.2 Para un valor de 3 sigma.

En las siguientes figuras se muestra cómo se comportan las proyecciones del patrón para 3 sigma. Es importante señalar que el error que se le está agregando a las proyecciones es considerable si se tiene en cuenta que en la práctica se obtuvo un valor de 0.003, el objetivo de este experimento es comprobar la eficiencia del método ante un aumento de este error.

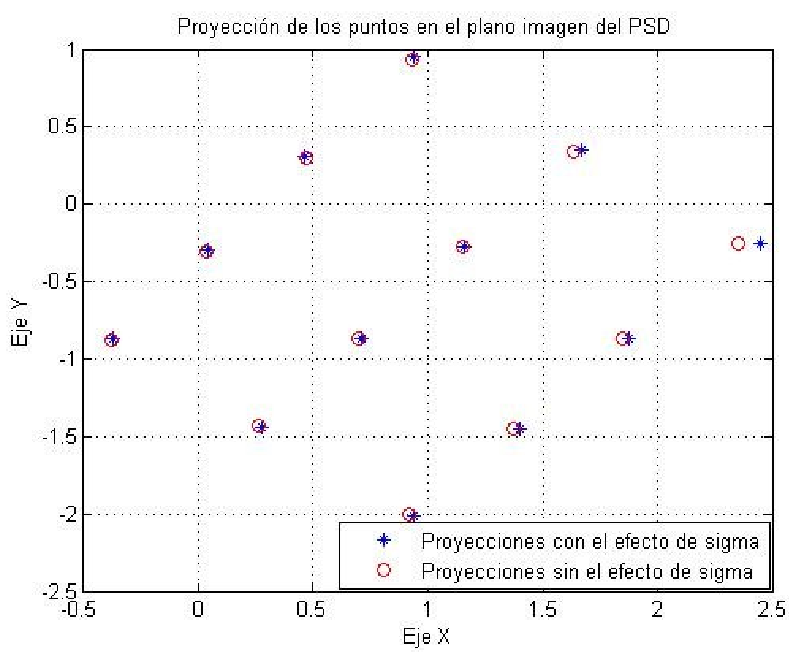

Figura 3.14. Proyección del patrón con el efecto de 3 sigma correspondiente a la Imagen 1.

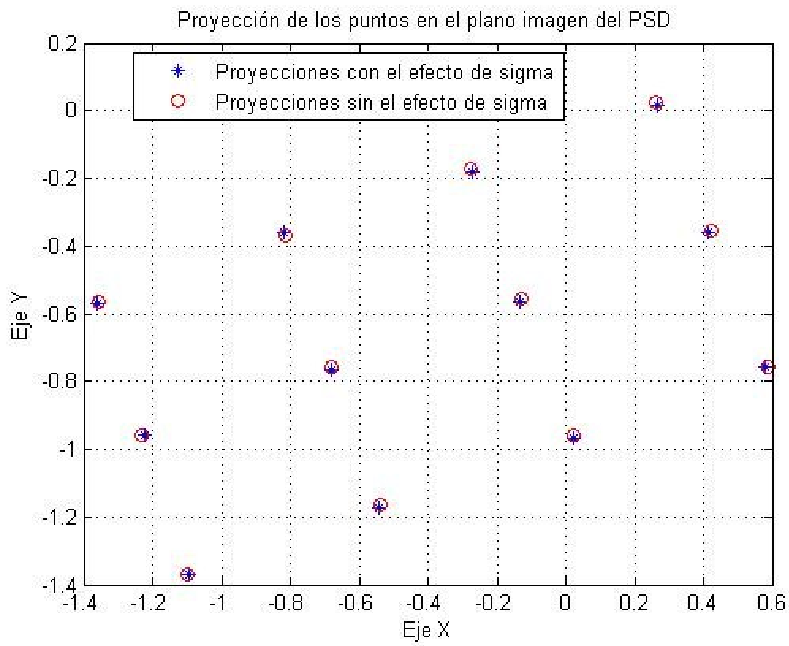

Figura 3.15. Proyección del patrón con el efecto de 3 sigma correspondiente a la Imagen 2.

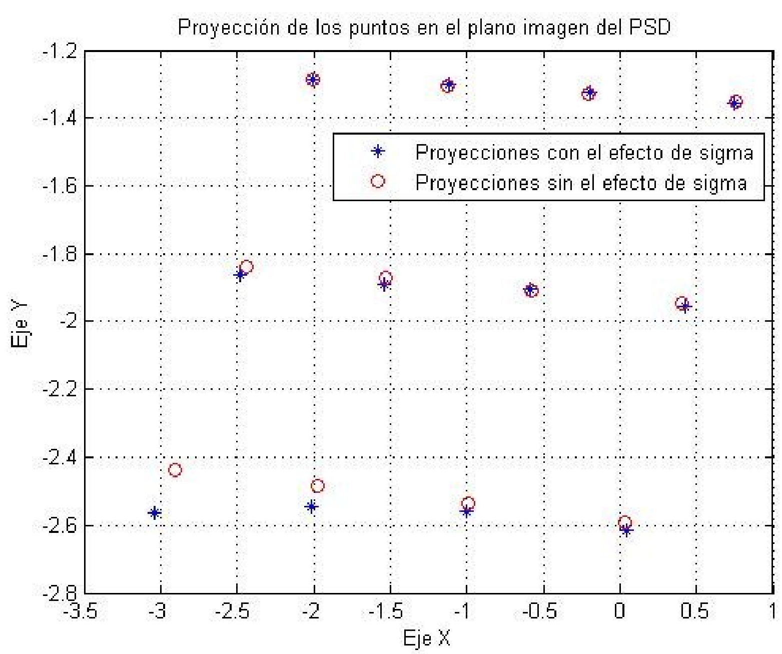

Figura 3.16. Proyección del patrón con el efecto de 3 sigma correspondiente a la Imagen 3.

En la Tabla 3.10 se muestran los parámetros optimizados obtenidos de la calibración para 3 sigma.

Tabla 3.10. Parámetros optimizados obtenidos de la calibración para 3 sigma.

Intrínsecos			
$x_0(mm)$	4,8704		
$y_0(mm)$	-0,7441		
$f(mm)$	9,9847		
Extrínsecos	Imagen 1	Imagen 2	Imagen 3
$gamma\ (\gamma)$	$48{,}3185^o$	$21{,}1504^o$	$-7{,}2931^o$
$beta\ (\beta)$	$33{,}6343^o$	$-10{,}9884^o$	$-3{,}4989^o$
$alpha\ (\alpha)$	$6{,}4657^o$	$1{,}9371^o$	$48{,}9252^o$
$T_x(mm)$	-190,2350	-628,6120	-496,7319
$T_y(mm)$	-197,7517	-164,8708	-129,3402
$T_z(mm)$	694,6383	1200,5270	561,5421

Con los parámetros optimizados mostrados en la Tabla 3.10 se calcularon las coordenadas de los puntos del patrón obteniendo el patrón mostrado en la Figura 3.17

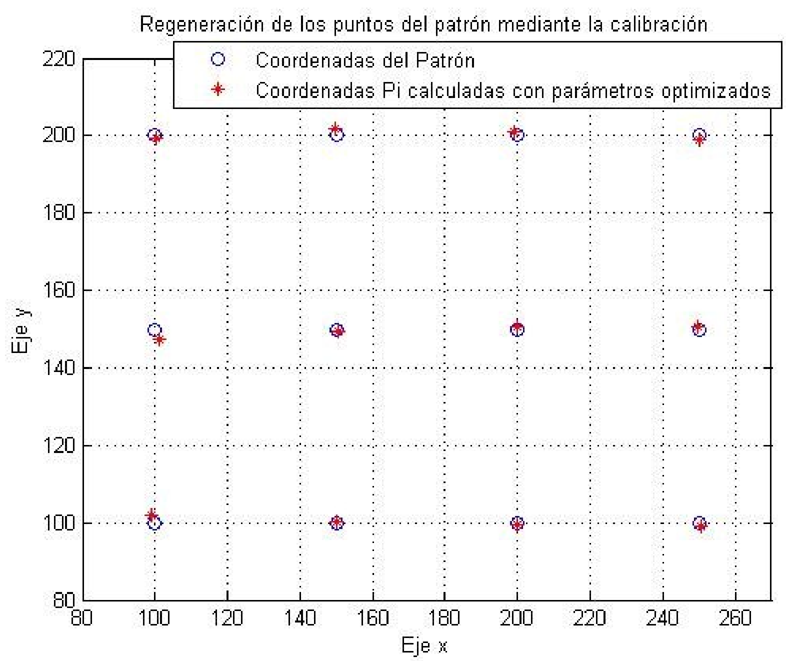

Figura 3.17. Patrón generado con las coordenadas de los puntos calculadas mediante los parámetros optimizados.

En la Figura 3.17 se puede observar que para 3 sigma las coordenadas de los puntos del patrón sufren un pequeño error mostrado en la Tabla 3.11.

Tabla 3.11. Error asociado al cálculo de las coordenadas de los puntos del patrón para 3 sigma.

Puntos		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Coordenadas Conocidas (mm)	x	100	150	200	250	100	150	200	250	100	150	200	250
	y	100	100	100	100	150	150	150	150	200	200	200	200
Coordenadas Calculadas (mm)	x	101,15	149,22	199,20	250,47	100,21	149,47	199,67	250,88	100,22	149,689	199,66	250,03
	y	98,134	100,35	101,70	99,162	150,52	151,06	150,71	149,24	199,87	199,864	200,25	199,10
Error (mm)		2,0452	0,3029	0,4012	0,9154	2,7968	0,6740	0,5270	0,8122	0,7513	1,7114	1,2499	0,9754

Como se observa en la Tabla 3.11 el error asociado al cálculo de las coordenadas de los puntos del patrón con los parámetros optimizados obtenidos del método aumenta, sin embargo, para el valor de sigma analizado se considera que el resultado es aceptable, si se tiene en cuenta que error para la mayoría de los puntos no llega al milímetro, por lo que el método presenta una buena respuesta ante este tipo de errores.

3.4.3 Para un valor de 5 sigma.

En las siguientes figuras se muestra cómo se comportan las proyecciones del patrón para 5 sigma. El objetivo de este experimento es analizar cómo se van afectando las coordenadas calculadas de los puntos del patrón partiendo de la calibración.

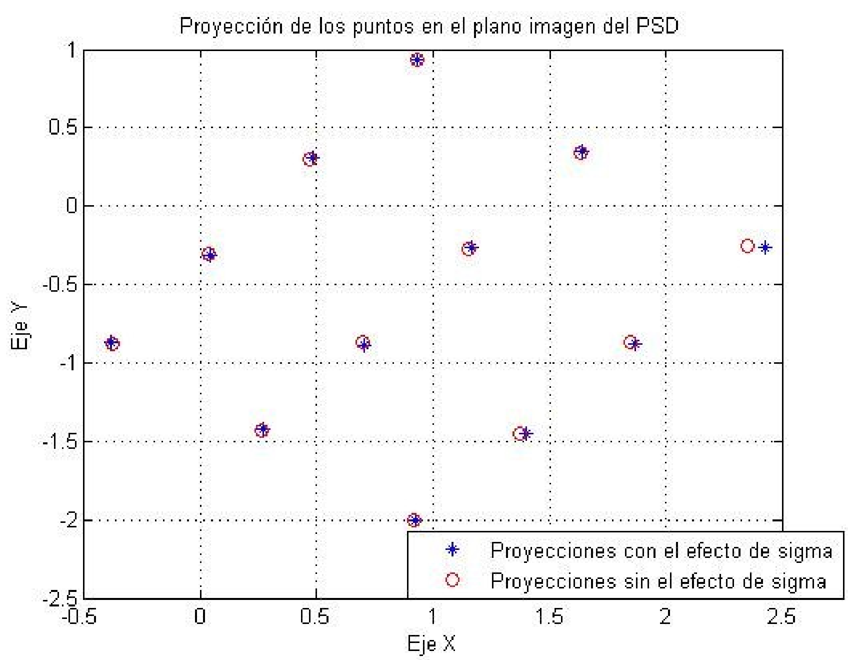

Figura 3.18. Proyección del patrón con el efecto de 5 sigma correspondiente a la Imagen 1.

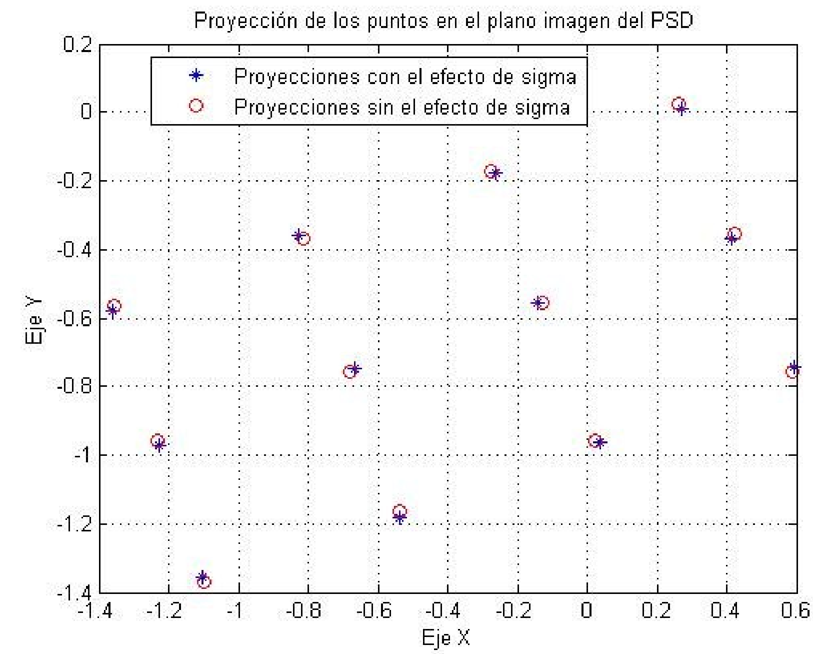

Figura 3.19. Proyección del patrón con el efecto de 5 sigma correspondiente a la Imagen 2

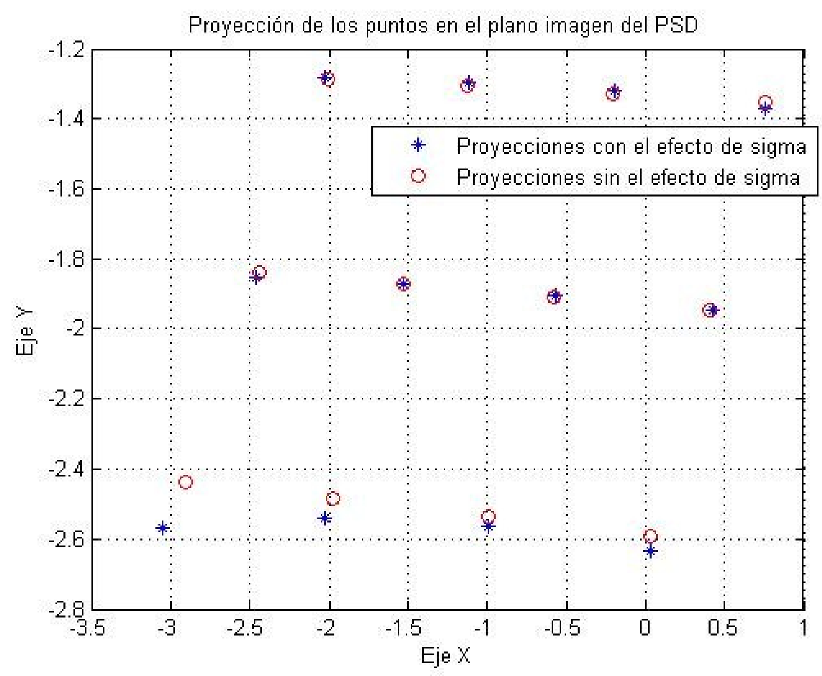

Figura 3.20. Proyección del patrón con el efecto de 5 sigma correspondiente a la Imagen 3

En la Tabla 3.12 se muestran los parámetros optimizados obtenidos de la calibración para 5 sigma.

Tabla 3.12. Parámetros optimizados obtenidos de la calibración para 5 sigma.

Intrínsecos			
$x_0(mm)$	6,5485		
$y_0(mm)$	7,9210		
$f(mm)$	8,2258		
Extrínsecos	Imagen 1	Imagen 2	Imagen 3
$gamma\ (\gamma)$	$41,1235^o$	$-50,7985^o$	$-26,8715^o$
$beta\ (\beta)$	$57,9122^o$	$-44,3548^o$	$-3,4090^o$
$alpha\ (\alpha)$	$-16,6436^o$	$120,4032^o$	$112,2812^o$
$T_x(mm)$	-162,0411	-453,1787	-408,5746
$T_y(mm)$	-435,8144	-402,3920	-157,9098
$T_z(mm)$	886,4287	1082,2094	598,7955

Con los parámetros optimizados mostrados en la Tabla 3.10 se calcularon las coordenadas de los puntos del patrón obteniendo el patrón mostrado en la Figura 3.21.

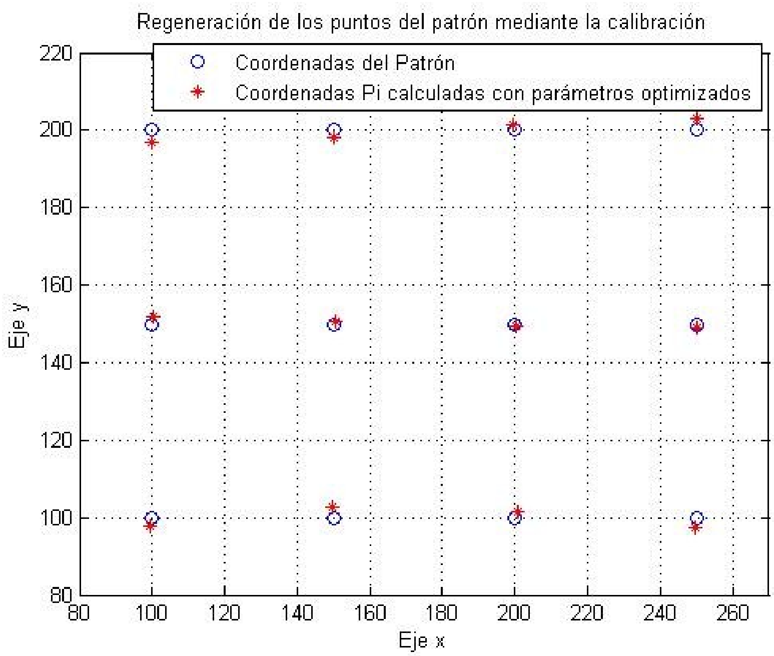

Figura 3.21. Patrón generado con las coordenadas de los puntos calculadas mediante los parámetros optimizados.

En la Tabla 3.13 se puede apreciar el error que se comete al incrementar valor medio cuadrático en las proyecciones de los puntos, incidiendo directamente en los puntos calculados como se evidencia en la Figura 3.21.

Tabla 3.13. Error asociado al cálculo de las coordenadas de los puntos del patrón para 5 sigma.

Puntos		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Coordenadas Conocidas (mm)	x	100	150	200	250	100	150	200	250	100	150	200	250
	y	100	100	100	100	150	150	150	150	200	200	200	200
Coordenadas Calculadas (mm)	x	99,009	150,46	199,60	250,30	102,05	150,41	199,88	249,54	99,567	148,860	199,13	250,99
	y	103,04	98,538	99,419	100,91	142,98	149,24	151,91	151,90	201,71	205,599	201,28	193,94
Error (mm)		2,5099	2,5662	1,5060	2,7661	2,0565	0,9731	0,7306	1,1877	3,1536	1,7434	1,4553	3,1279

Como se puede apreciar en la Tabla 3.13, el error incrementa con valores que oscilan entre 0 y 3 milímetros viéndose la afectación en las coordenadas calculadas de los puntos del patrón, sin embargo se ha demostrado la eficiencia del método ente valores de error elevados y que en la práctica son difíciles que ocurran si se tienen en cuenta las condiciones ideales para la realización de los experimentos.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

- Respecto al patrón a utilizar en el proceso de calibración, se optó por una plantilla bidimensional, debido a que la calibración resulta más versátil y la elaboración de la plantilla se puede realizar fácilmente.
- Del análisis de los métodos de calibración de cámara, se seleccionó el método de Zhang para la calibración de la pseudocámara, ya que en este no es necesario conocer las posiciones de la cámara desde donde se han tomado las imágenes de la plantilla, y no necesita una preparación exhaustiva de la escena.
- Para la elaboración del modelo geométrico de la pseudocámara se tomó como referencia el modelo *Pin-Hole*. Para ello se consideró que al transformar de coordenadas métricas a coordenadas eléctricas no es necesario tener en cuenta el tamaño de un píxel en los ejes 'x' e 'y' cuando se trabaja con un PSD.
- El modelo *Pin-Hole* considera el uso de una lente delgada, sin embargo, en la práctica solo se cuenta lentes gruesas. Esta situación llevó a considerar en la elaboración del modelo geométrico de la pseudocámara la distorsión óptica causada por la misma, siendo la distorsión radial la de mayor efecto.
- Se programó en el software Matlab R2014a el método de calibración para la pseudocámara, tomando como referencia el método de Zhang. Como parte del análisis se compararon los resultados obtenidos para el caso de las proyecciones sin errores y con distorsión óptica. Del mismo se comprobó que el método de calibración funciona correctamente. Pues para ambos casos se obtuvieron errores en el orden de los $10^{-11}\,mm$ y $10^{-2}\,mm$ respectivamente.
- Los experimentos en los cuales, a las proyecciones con distorsión óptica se le adicionó un error de un sigma, 3 sigma y 5 sigma, donde sigma tiene un valor de 0.003 y fue obtenido en una práctica real con la pseudocámara, dieron como resultado un error de 0.3 *mm*, 0.8 *mm* y 1.7 *mm* respectivamente. Lo cual permite concluir que el método de calibración geométrica realizado es robusto.

Recomendaciones

Realizar la calibración eléctrica de la pseudocámara; pues el sensor entrega corrientes eléctricas al circuito de procesamiento de señal C4674, donde las mismas están propensas a sufrir alteraciones e introducir un error en la determinación de las coordenadas del punto de incidencia del haz de luz en el área activa del sensor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] J. Iserh Gonzalez, "Estudio esperimental de métodos de calibración y autocalibración de cámaras," 2003.

[2] L. Charvonnier and A Fournier, "Heading guidance and obstacles localization for an indoor movile robot," in *IEEE International Conference on Advanced Robotics*, 1995, p. 700.

[3] D. Khadraoui, G Motyl, P Martinet, J Gallice, and F Chaumette, "Visual servoing in robotics scheme using a camera/laser-stripe sensor," in *IEEE International Journal Robotics and Atoimation 12*, 1996, p. 750.

[4] R. Lenz and R Tsai, "Calibrating a Cartesian robot with eye-on-hand configuration independent of eye-to-hand relationship.," in *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence 11*, 1989, p. 928.

[5] C. Ricolfe Viala, "Caracterización y optimización del proceso de calibrado de cámaras basado en plantilla bidimensional," Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Tesis doctoral 2006.

[6] D. Aracena Pizarro, P Campos, and Carlos Luis Tosí, "Comparación de técnicas de calibrado de cámaras digitales," *Facultad de Ingenieria- Universidad de Tarapacá*, vol. 13, no. 1, p. 67, 2005.

[7] Q. Luong, O Faugeras, and S Maybank, "Camera self-calibration: theory and experiments.," in *Proceeding of the Europena Coference on Computer Vision*, 1992, p. 400.

[8] S Maybank and O Faugeras, "A theory of self-calibration of a miving camera.," in *International Journal of Computer Vision*, 1992, p. 320.

[9] B. Martín Guadaño, Ana Melcón Sanjuán, and Daniel Tapia Manganeso, "Identificación óptica de la posición y orientación de un Vehículo Aéreo no Tripulado," Universidad Complutense de Madrid, Madrid, 2009.

[10] Y Abdel-Aziz and H Karara, "Direct linear transformation into object space coordinates in close-range photogrammetry. Procedings symposium on close-range photogrametry," Illinois, 1971.

[11] E Hall and J Tio, "Measuring curvedsurfaces for robot vision," in *Computing Journal 15*, 1982, p. 230.

[12] J Wei and S de Ma, "Implicit and explicit camera calibrationn: Theory and experiments," in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and machine intelligence*, 1994, p. 150.

[13] E Hall and J Tio, "Measuring curved surfaces for robot vision," in *Computing Journal 15*, 1982, p. 55.

[14] G Wei and S de Ma, "A complete two-plane camera calibration method and experiemental comparison," in *Procedings of 4th International Conference on Computer Vision* , 1993, p. 560.

[15] Z Zhang, Camera calibration with one-dimensional objects. Technical Report MSR-TR-2001-120 Microsoft research, 2002.

[16] J. R. Fontana Oneto, "Sistema de posicionamiento 3-D para espacios interiores basado en infrarrojos," Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, Trabajo fin de Máster 2010.

[17] Hamamatsu Photonics, PSD Technical Information, Hamamatsu Photonics K.K., Solid State Division, 1126-1, Hamamatsu City, 435-8558, Japan, 2007, Datasheet del PSD.

[18] A. Gago Abad, "Modelado preliminar de una pseudocámara basada en un Sensor de Posición (PSD) para aplicaciones de posicionamiento de robots," Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Trabajo de Diploma 2013.

[19] C. Ricolfe Viala, "Caracterización y optimización del proceso de calibrado de cámaras basado en plantilla bidimensional," Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Tesis doctoral 2006.

[20] J. Craig, *Robótica*, Tercera Edición ed. México, México: Pearson Educación, 2006.

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Término	Descripción
$\boldsymbol{C_0}$	Centro óptico.
H	Homografía.
$\mathbf{P_i}$	Punto situado en el entorno.
$\mathbf{p_i}$	Punto proyectado en el plano imagen.
PSD	Dispositivo Sensor de Posicionamiento.
R	Matriz de rotación.
T	Vector de traslación.
$\mathbf{T_x}$	Componente ‘x’ del vector de traslación.
$\mathbf{T_y}$	Componente ‘y’ del vector de traslación.
$\mathbf{T_z}$	Componente ‘z’ del vector de traslación.
1D	Unidimensional.
2D	Bidimensional.
3D	Tridimensional.

ANEXOS

Anexo I Modelo de cámara Pin-Hole.

Tradicionalmente, el modelo de cámara más utilizado para pasar de coordenadas reales 3D a coordenadas 2D pertenecientes a la imagen captada, es el modelo de transformación de perspectiva conocido como *Pin-Hole*. En este modelo todos los rayos provenientes de un objeto en el espacio pasan por un mismo punto (centro óptico) para impactar en el sensor de imagen. Debido a que el comportamiento de las lentes no es lineal, este modelo debe ser corregido con parámetros que lo acerquen al comportamiento real de la lente. En la Figura A.1 se muestran los sistemas de referencias utilizados para representar el modelo de cámara *Pin-Hole* y la correspondencia de las coordenadas de los puntos en el espacio respecto al sistema de regencia de la cámara.

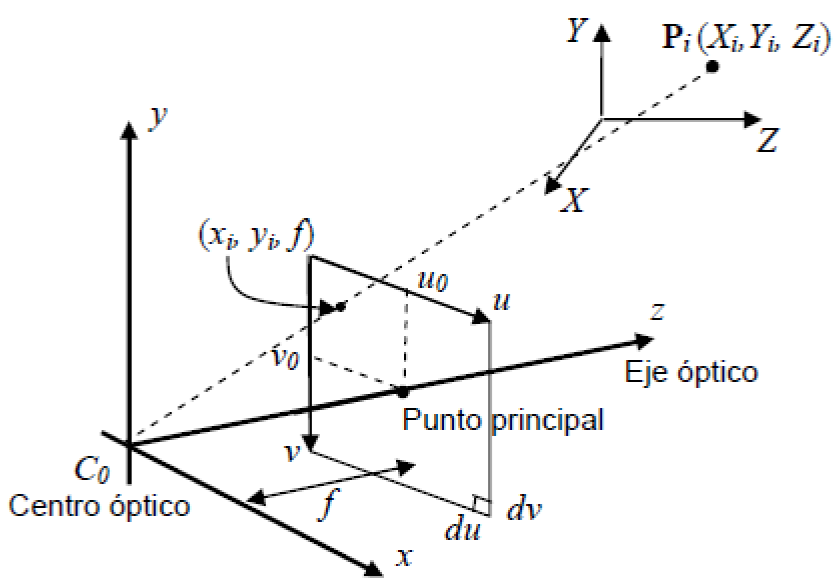

Figura A.1. Modelo geométrico Pin-Hole de la cámara.

En esta representación del modelo *Pin-Hole* el plano imagen se sitúa por delante del centro óptico para no tener la imagen invertida. El sistema de referencia de la cámara se encuentra en el centro óptico, coincidiendo el eje *z* de dicho sistema con el eje óptico. El plano imagen, de coordenadas (*u*, *v)*, es perpendicular al eje *z* y se encuentra situado a una distancia igual a *f* (distancia focal). La intercepción del eje óptico con el plano imagen (punto principal) en sistemas con óptica y focal fija es constante y desconocida antes de la calibración.

Para realizar la calibración se utilizan cuerpos geométricos con características específicas conocidos como patrones o plantillas. Un punto $\boldsymbol{P_i}$ del patrón respecto al sistema de coordenadas de la cámara se representa por:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ f \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot (R \cdot P_i + T) \tag{A.1}$$

donde, (x_i, y_i, *f*) son la coordenada de la proyección del punto P_i en el plano imagen, λ*i* es un factor de escala utilizado para pasar del sistema de coordenadas 3D del patrón al sistema de coordenadas 2D del plano imagen, *R* es la matriz de rotación del patrón y *T* (A.4) el vector de traslación del sistema de referencia C_0respecto al sistema de referencia del patrón.

La matriz *R* se define según los ángulos de Euler utilizados, es decir el orden en que se rotan los ejes, en este caso se utiliza R_{XYZ} como se muestra a continuación:

$$R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\beta & 0 & sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\beta & 0 & cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\gamma & -sin\gamma \\ 0 & sin\gamma & cos\gamma \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

Realizando la multiplicación de ambas matrices se obtiene

$$R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} cos\alpha cos\beta & cos\alpha sin\beta sin\gamma - sin\alpha cos\gamma & cos\alpha sin\beta cos\gamma + sin\alpha sin\gamma \\ sin\alpha cos\beta & sin\alpha sin\beta sin\gamma + cos\alpha cos\gamma & sin\alpha sin\beta cos\gamma - cos\alpha sin\gamma \\ -sin\beta & cos\beta sin\gamma & cos\beta cos\gamma \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

$$T = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

Prescindiendo del factor de escala en (A.1), se puede plantear que un punto P_i del patrón respecto al sistema de coordenadas de la cámara, su proyección en el plano imagen se modela de forma matricial de la siguiente manera:

$$p_i = M_{3x4} \cdot P_i \tag{A.5}$$

Donde p_i es la proyección del punto P_i en el plano imagen y *M* es la matriz de 3x4 que describe el proceso de rotación y traslación de un punto ubicado en la escena.

Normalizando y prescindiendo del subíndice *i* en (A.1), para cada punto del patrón se obtienen dos ecuaciones conocidas como "*ecuaciones de colinearidad*", mostradas en la ecuación A.6.

$$\begin{cases} x = f\,\frac{r_{11}X+r_{12}Y+r_{13}Z+T_x}{r_{31}X+r_{32}Y+r_{33}Z+T_z} \\ y = f\,\frac{r_{21}X+r_{22}Y+r_{23}Z+T_y}{r_{31}X+r_{32}Y+r_{33}Z+T_z} \end{cases} \qquad \text{(A.6)}$$

Las coordenadas *(x, y)* están expresadas en unidades métricas, por lo que hay que utilizar un factor de transformación que las lleve a píxeles si se desea trabajar en unidades pixélicas. También es necesario tener en cuenta que los píxeles pueden tener dimensiones horizontal y vertical diferentes (no cuadrados), haciendo imprescindible el uso de un factor de escala diferente para cada eje de la imagen.

Las ecuaciones de un punto en el plano imagen expresadas en píxeles son:

$$\begin{cases} x = (u - u_o)du \\ y = (v - v_o)dv \end{cases} \qquad \text{(A.7)}$$

donde, (u_o,v_o) es el punto principal que representa las coordenadas (en píxeles) del punto de intersección del eje óptico de la cámara con el plano imagen y (*du*, *dv*) son las dimensiones de un píxel en lo ejes *u* y *v*, respectivamente.

Introduciendo en (A.7) el error que se comete en la detección de *u* y *v* en la imagen, se tiene:

$$\begin{cases} x = (u - u_o + e_u)du \\ y = (v - v_o + e_v)dv \end{cases} \qquad \text{(A.8)}$$

Siendo e_u y e_v los errores en la detección de *u* y *v*, respectivamente.

El modelo *Pin-Hole* es válido para lentes delgadas, dado que el espesor de estas se puede considerar despreciable y que todos los rayos principales pasan por el mismo punto. Cuando se trabaja con lentes gruesas, este modelo no tiene en cuenta que la transformación entre las coordenadas de los puntos en el espacio y sus valores correspondientes en el plano imagen, vienen dados por dos planos principales diferentes. Esto hace que el modelo deba ser corregido con la ayuda de otros parámetros que permitan modelar la distorsión que se introduce.

En la calibración de cámaras se suelen utilizar dos tipos de distorsión: distorsión radial y distorsión tangencial. Si a (A.8) se le agrega el error introducida por la distorsión óptica de las lentes, se obtiene:

$$\begin{cases} x = (u - u_o + e_u)du - do_x \\ y = (v - v_o + e_v)dv - do_y \end{cases} \tag{A.9}$$

donde, do_x y do_yson las componentes de distorsión óptica de la lente, que se pueden dividir en dos partes, distorsión radial y distorsión tangencial, esto es:

$$\begin{cases} do_x = do_{xr} + do_{xt} \\ do_y = do_{yr} + do_{yt} \end{cases} \tag{A.10}$$

Introduciendo los modelos matemáticos basados en polinomios, que comúnmente se utilizan en fotogrametría, las componentes de distorsión radial y tangencial se representan por:

$$\begin{cases} do_{xr} = (u - u_o) \cdot du \cdot (a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6) \\ do_{yr} = (v - v_o) \cdot dv \cdot (a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6) \end{cases} \tag{A.11}$$

$$\begin{cases} do_{xt} = p_1 \left[r^2 + 2(u - u_o)^2 du^2 \right] + 2p_2 (u - u_o) \cdot du \cdot (v - v_o) dv \\ do_{yt} = p_2 \left[r^2 + 2(v - v_o)^2 dv^2 \right] + 2p_1 (u - u_o) \cdot du \cdot (v - v_o) dv \end{cases} \tag{A.12}$$

siendo: $a_1, a_2\ y\ a_3$ los coeficientes del polinomio que modela la distorsión radial, p_1y $p_2$los coeficientes del polinomio que modela la distorsión tangencial y $r = \sqrt{(u - u_o)^2 du^2 + (v - v_o)^2 dv^2}$ la distancia radial entre un punto y el punto principal. Para pequeñas variaciones de *r* se producen cambios elevados en las componentes de distorsión radial, debido a que se encuentra elevado a la segunda, cuarta y sexta potencia.

Haciendo $f_x = \frac{f}{du}$ y $f_y = \frac{f}{dv}$ sustituyendo en (A.9),

$$\begin{cases} u + e_u = u_0 + \frac{do_x}{du} + f_x \frac{r_{11}X + r_{12}Y + r_{13}Z + T_x}{r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z + T_z} \\ v + e_v = v_0 + \frac{do_y}{dv} + f_y \frac{r_{21}X + r_{22}Y + r_{23}Z + T_y}{r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z + T_z} \end{cases} \tag{A.13}$$

Para reducir el número de incógnitas, en (A.13) se cambia el factor de escala manteniendo la proporcionalidad, quedando de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u + e_u = u_0 + do_x + f_x \frac{r_{11}X + r_{12}Y + r_{13}Z + T_x}{r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z + T_z} = P(\emptyset) \\ v + e_v = v_0 + do_y \cdot \frac{f_y}{f_x} + f_y \frac{r_{21}X + r_{22}Y + r_{23}Z + T_y}{r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z + T_z} = Q(\emptyset) \end{cases} \tag{A.14}$$

donde $\emptyset = \left[u_o, v_o, a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, f_x, f_y, T_x, T_y, T_z, \alpha, \beta, \gamma\right]^T$ es un vector que contiene 9 parámetros intrínsecos (característicos de la cámara y la lente) y 6 parámetros extrínsecos (posición geométrica relativa entre el patrón y la cámara).

Dado que el sistemas de ecuaciones que se forma a partir (A.14) para los *N* puntos del patrón, es no lineal, es necesario resolverlo utilizando un método de aproximaciones sucesivas, con el objetivo de optimizar los valores de los parámetros intrínsecos de la cámara: punto principal (u_o, v_o), relaciones de las distancias focales entre el tamaño de píxel horizontal y vertical (f_x, f_y) y parámetros de corrección de la distorsión ocasionada por la óptica (distorsión radial a_iy distorsión tangencial p_i). Además, se obtienen los parámetros extrínsecos $(T_x, T_y, T_z, \alpha, \beta, \gamma)$.