



Universidad  
Oriente



# TESIS EN OPCIÓN AL TÍTULO ACADÉMICO DE MÁSTER EN CIENCIAS.

*TÍTULO: “Control por modo deslizando para  
robot articular.”*

AUTOR: Ing. Nardy Bernal Rubio.

TUTORES: Dra. Ania Lussón Cervantes.

Dr. Francisco Chang Mumañ.

Santiago de Cuba

Marzo de 2015

**DEDICATORIA**

*A mi madre por su amor, dedicación, apoyo, guía y ejemplo.*

*A mi esposa por su amor, ayuda y comprensión.*

*A mi padrastro por acogerme como parte de su familia y guiarme como su propio hijo.*

*A mi hermano por su cariño y apoyo en todo lo que me he propuesto.*

*A mis amigos por estar siempre presentes.*

**AGRADECIMIENTOS**

*A mis tutores Dra. Ania Lussón Cervantes y Dr. Francisco Chang por su asesoría y recomendaciones oportunas.*

*A mis compañeros y amigos David y Michel por la colaboración incondicional prestada para la realización de esta investigación.*

*A los profesores del Departamento de Control Automático en general por su contribución en mi formación profesional.*

*A mis abuelitos Nancy y Angelito, así como toda su familia por tantos años de paciencia y apoyo.*

*A mis suegros por la ayuda y educación que me han brindado.*

*A todas las personas que me brindaron su voto de confianza y me extendieron su mano amiga cuando más lo necesitaba.*

*A todos muchas gracias.*

## **RESUMEN**

En los últimos años el problema del seguimiento de trayectorias en robots manipuladores ha sido abordado aplicando una gran variedad de controladores partiendo desde las técnicas de control clásico hasta técnicas de control avanzadas y robustas.

El Control Modo Deslizante es una creciente herramienta para controlar sistemas con dinámicas de alto orden bajo condiciones de incertidumbre, los cuales son comunes en muchos procesos modernos.

El objetivo de la investigación el diseño de una estrategia de control robusta por Modo Deslizante para el control de posición de un robot manipulador articular de 2 GDL; haciendo uso de la herramienta computacional MATLAB, a fin lograr las bondades que esta alternativa de control ofrece para mejorar la respuesta en tiempo del sistema y la compensación de incertidumbres paramétricas del modelo dinámico.

**ABSTRACT**

In recent years the problem of trajectory tracking in robot manipulators has been addressed using a variety of drivers starting from classic control techniques to advanced techniques and robust control.

Sliding Mode Control is a growing tool for controlling dynamic systems with high order under uncertainty, which are common in many modern processes.

The objective of the research to design a robust strategy Sliding Mode Control for position control of a robot manipulator joint 2 DOF; using the MATLAB computational tool to achieve the benefits that this alternative of control offers to improve the response time of the system and offset the dynamic model parametric uncertainties.

**NOTACIONES GENERALES.**

GDL	Grados de libertad
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
$\mathfrak{R}$	Números reales
$V(x)$	Función Candidata de Lyapunov
$q$	Vector de posiciones articulares
$\dot{q}$	Vector de velocidades articulares
$\ddot{q}$	Vector de aceleraciones articulares
$q_d$	Vector de trayectorias deseadas
$\tilde{q}$	Vector de errores articulares
$\tau$	Vector de pares
$C(q, \dot{q})$	Matriz de fuerzas centrífugas y de coriolis
$M(q)$	Matriz de inercias
$G(q)$	Vector de pares gravitacionales
$m$	Masa del eslabón
$l$	Longitud del eslabón
$l_c$	Longitud centro de masa del eslabón
$I$	Inercia
$g$	Gravedad
$E_f$	Efector final
MD	Modo Deslizante
CMD	Control por Modo Deslizante
CTC	Control por Torque Calculado
E.O.M	Ecuaciones de Movimiento

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO I. Caracterización de las estrategias empleadas para el control de robots manipuladores.....	4
Introducción.....	4
1.1 Caracterización teórica de los robots manipuladores.....	4
1.1.1 Modelos Cinemáticos de un Robot de 2 GDL .....	5
1.1.2 Modelo Dinámico de un Robot de 2 GDL .....	8
1.1.3 Planificación de la trayectoria y control de movimiento del manipulador. Tipos de Trayectorias.....	14
1.1.3.1 Trayectorias punto a punto.....	14
1.1.3.2 Trayectorias coordinadas .....	15
1.1.3.3 Trayectorias continuas .....	15
1.2 Caracterización de las estrategias para el control de posición de robots manipuladores de $n$ GDL.....	16
1.2.1 Control cinemático.....	16
1.2.2 Control dinámico.....	17
1.2.2.1 Control Proporcional Derivativo.....	18
1.2.2.2 Control por Par Calculado .....	20
1.2.2.3 Control por Modo Deslizante.....	21
Obtención de la ley de CMD aplicada a robot manipulador de $n$ GDL.....	24
1.3 Estado del arte de las estrategias de control aplicadas a sistemas robóticos .....	27
Conclusiones del Capítulo I.....	30
Capítulo II. Diseño del Sistema de Control de posición de Robot articular de 2 GDL	31
Introducción.....	31
2.1 Diseño de las estrategias de control de posición de un Robot articular de 2 GDL	31
2.1.1 Diseño del Generador de trayectorias .....	32
2.1.2 Diseño Modelo Cinemático Inverso .....	34
2.1.3 Diseño del Modelo Dinámico Directo.....	35

## *Índice*

2.1.4 Diseño del Modelo Cinemático Directo.....	38
2.1.5 Diseño del Controlador.....	39
2.1.5.1 Estrategia de Control Proporcional Derivativo.....	39
2.1.5.2 Estrategia Control Par Calculado.....	43
2.1.5.3 Estrategia de control por Modo Deslizante.....	47
2.2 Incertidumbres Paramétricas de Modelo dinámico.....	53
2.3 Análisis de los resultados.....	60
Conclusiones del Capítulo II.....	61
CONCLUSIONES GENERALES.....	62
RECOMENDACIONES.....	63
BIBLIOGRAFÍA.....	64
ANEXOS.....	68

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Robot manipulador de $n$ GDL.....	4
Figura 1.2	Problemas cinemáticos directo e inverso.....	5
Figura 1.3	Marcos coordenados para robot articular de 2 GDL.....	6
Figura 1.4	Robot articular de 2 GDL.....	9
Figura 1.5	Diferentes trayectorias articulares posibles para un robot de 2 GDL.....	16
Figura 1.6	Funcionamiento del control cinemático.....	17
Figura 1.7	Robot manipulador en lazo cerrado.....	18
Figura 1.8	Diagrama en bloques del sistema de control proporcional más retroalimentación de velocidad.....	19
Figura 1.9	Diagrama en bloques del control PD de un robot manipulador.....	20
Figura 1.10	Diagrama en bloques del CTC.....	21
Figura 1.11	Superficie de deslizamiento $S(x)=0$ .....	22
Figura 1.12	Trayectorias en el plano de fase de un sistema de estructura variable.....	23
Figura 1.13	Fenómeno de “chattering” ( $S=0$ ).....	25
Figura 1.14	Superficie de deslizamiento y capa frontera.....	26
Figura 1.15	Función $\text{sat}(S)$ para la eliminación del chattering.....	26
Figura 2.1	Diagrama en bloques general del sistema de control.....	31
Figura 2.2	Eje de coordenadas del espacio de trabajo del robot.....	33
Figura 2.3	Bloque y parámetros del Generador de Trayectorias.....	34
Figura 2.4	Trayectorias cartesianas generadas para los dos casos...	34
Figura 2.5	Bloque MCI.....	35
Figura 2.6	Evolución temporal de las posiciones articulares de referencias $q_{d1}$ y $q_{d2}$ , para los 2 casos de generación de trayectoria.....	35
Figura 2.7	Bloque principal del MDD.....	36
Figura 2.8	Composición interna del bloque principal del MDD.....	37
Figura 2.9	Bloque MCD.....	38
Figura 2.10	Prueba de verificación de MCI y MCD.....	38
Figura 2.11	Resultados prueba de verificación.....	39
Figura 2.12	Salidas articulares de los 2 casos con control PD, donde se alcanza el régimen oscilatorio ( $K_p = 85, K_v = 0$ ).....	40
Figura 2.13	Salidas de posición articular para seguimiento de trayectoria lineal en control PD.....	41

## *Índice de Figuras*

Figura 2.14	Salida del sistema de control PD en coordenadas cartesianas.....	41
Figura 2.15	Esfuerzos del control PD aplicado a las articulaciones de los dos casos.....	42
Figura 2.16	Diagrama en bloques general para el seguimiento de señal tipo seno.....	42
Figura 2.17	Salidas de la posición articular del control PD para el seguimiento de la señal seno.....	43
Figura 2.18	Esfuerzos de la estrategia de control PD para el seguimiento de señales tipo seno: a) esfuerzo articulación 1, b) esfuerzo articulación 2.....	43
Figura 2.19	Bloque CTC.....	44
Figura 2.20	Salidas articulares de los 2 casos con CTC, donde se alcanza el régimen oscilatorio ( $Kp = 1000, Kv = 0$ ).....	45
Figura 2.21	Salidas de posición articular para seguimiento de trayectoria por el CTC.....	46
Figura 2.22	Salidas del sistema de control con CTC en coordenadas cartesianas.....	46
Figura 2.23	Esfuerzos de control CTC aplicado a las articulaciones de los dos casos.....	47
Figura 2.24	Bloque CMD.....	48
Figura 2.25	Salida de la posición articular 1 ante tres valores de $K_1$ ...	48
Figura 2.26	Salida de la posición articular 2 ante tres valores de $K_2$ ...	49
Figura 2.27	Superficies deslizantes para los dos casos.....	49
Figura 2.28	Salidas de posición articular para el seguimiento de trayectoria por el CMD.....	50
Figura 2.29	Salidas del sistema de control con CMD en coordenadas cartesianas.....	51
Figura 2.30	Esfuerzos de control CMD aplicado a las articulaciones de los dos casos.....	51
Figura 2.31	Seguimiento señal seno por el CMD.....	52
Figura 2.32	Esfuerzos de la estrategia CMD para el seguimiento de señales tipo seno.....	52
Figura 2.33	Desempeños alcanzados por las tres estrategias de control para los dos casos de trayectoria de referencia en línea recta.....	53
Figura 2.34	Incertidumbres de los parámetros del modelo.....	54
Figura 2.35	Comportamiento de la estrategia PD ante la variación de los parámetros.....	55
Figura 2.36	Esfuerzos de Control de la estrategia PD ante la	

## *Índice de Figuras*

	variación de los parámetros.....	56
Figura 2.37	Comportamiento de la estrategia CTC ante la variación de los parámetros.....	57
Figura 2.38	Esfuerzos de Control de la estrategia CTC ante la variación de los parámetros.....	58
Figura 2.39	Comportamiento de la estrategia CMD ante la variación de los parámetros.....	59
Figura 2.40	Esfuerzos de Control de la estrategia CMD ante la variación de los parámetros.....	60

### INTRODUCCIÓN

Dentro del campo de la robótica, se tiene gran variedad de sistemas robóticos según sea su aplicación. De manera genérica se encuentran los robots móviles y los robots manipuladores articulados, estos últimos aplicados en gran medida en la industria para realizar tareas de pintura, ensamble, soldadura, manipulación de herramientas, etc., con la finalidad de facilitar la ejecución de trabajos repetitivos de alta precisión los cuales podrían ocasionar lesiones en las personas.

En general una de las áreas más estudiadas de la robótica es el control de robots manipuladores articulados, dichos robots se caracterizan por ser sistemas dinámicos de múltiples entradas y múltiples salidas (conocidos como sistemas multivariables) de tipo no lineal (Maldonado del Toro & Silva Ortigoza, 2011).

En los últimos años el problema del seguimiento de trayectorias en robots manipuladores ha sido abordado aplicando una gran variedad de controladores (Torres & Méndez, 2009). Los robots industriales utilizan normalmente el control clásico tipo PID (Proporcional Integral Derivativo) y de manera generalizada el control PD (Proporcional Derivativo); pero los brazos manipuladores, los cuales se componen de varias articulaciones unidas entre sí, poseen una dinámica altamente no lineal con un fuerte acoplamiento entre sus respectivas articulaciones. Esto complica la tarea de un simple controlador PD, así como su sintonización, sobre todo con consignas a altas velocidades o aceleraciones, por lo que se han utilizado propuestas de controladores basados en el modelo del robot, los cuales, al hacer uso internamente del modelo matemático del mecanismo, logran compensar los términos dinámicos presentes.

En la robótica industrial, la estrategia de control más común, basada en el modelo matemático del manipulador, es el Control por Par Calculado (CTC), la cual es relativamente fácil de implementar y provee resultados satisfactorios en cuanto a errores de seguimiento y robustez.

Pero las incertidumbres presentes debido a parámetros mal estimados o no modelados limitan la validez del modelo usado como base para el diseño del controlador y dificultan la obtención de un algoritmo eficaz basado en un modelo matemático exacto. Los manipuladores controlados de esta forma se mueven a velocidades lentas con vibraciones innecesarias. Por lo que podemos plantear como **problema** de la investigación las insuficiencias que presentan las estrategias de control usadas comúnmente para el control de los robots manipuladores articulares, que aunque ofrecen estabilidad, presentan errores de

## *Introducción*

seguimiento y poca robustez debido a la presencia de no linealidades e incertidumbres paramétricas en el modelo dinámico. Para ello se define como **objeto** de la investigación un robot articular de 2 GDL (Grados de Libertad).

Actualmente existe una estrategia de control que tiene una elevada aceptación dentro de la comunidad científica e ingenieril debido a que se caracteriza por presentar gran simplicidad, insensibilidad a perturbaciones e incertidumbres y alto grado de robustez conocido como Control por Modo Deslizante (CMD) y teniendo en cuenta la problemática antes mencionada, sabiendo que el sistema de control debe estar preparado a responder satisfactoriamente ante la modificación de sus parámetros, podemos plantear como **objetivo** de la investigación el diseño de una estrategia de control robusta por Modo Deslizante para el control de posición de un robot manipulador articular de 2 GDL; haciendo uso de la herramienta computacional MATLAB, a fin lograr las bondades que esta alternativa de control ofrece para mejorar la respuesta en tiempo del sistema y la compensación de incertidumbres paramétricas. Por las razones anteriormente expuestas se define como **campo de acción** el Control por Modo Deslizante. Como **hipótesis** podemos plantear que si se diseña el control para robots manipuladores articulados con técnicas de control robusto por Modo Deslizante se mejorará la respuesta en el tiempo del mismo.

Las **tareas** para dar cumplimiento al objetivo de la presente investigación se relacionan a continuación:

1. Caracterizar desde el punto de vista gnoseológico e histórico los robots manipuladores.
2. Caracterizar desde el punto de vista gnoseológico e histórico las técnicas de control empleadas.
3. Diseñar las estrategias de control.
4. Simular las alternativas de control propuestas para un robot articular de 2 GDL.
5. Analizar los resultados de la investigación.

### **Métodos y técnicas empleados en la investigación:**

1. Análisis de fuentes documentales.
2. Técnicas y métodos empíricos: Observación, Encuestas y Entrevistas.
3. Método histórico-lógico.
4. Método de análisis y síntesis.
5. Métodos experimentales: Diseño y simulación.

### **Significación práctica**

La investigación muestra las potencialidades de la técnica de Control por Modo Deslizante (CMD) comparada con estrategias clásicas como PD y CTC para el control de un robot articular de 2 GDL. El diseño y simulación de los controladores se realiza con el programa MATLAB 2013. El sistema desarrollado puede ser utilizado en las prácticas de laboratorio de las disciplinas Automática y Sistemas de Control de la carrera Ingeniería en Automática de la Universidad de Oriente.

El presente trabajo se encuentra organizado de la siguiente forma: una introducción general donde se exponen las principales motivaciones que llevaron a la realización de esta investigación y la fundamentación del diseño metodológico de la misma, consta de dos capítulos, donde cada uno comienza por una breve introducción de los temas abordados y se organiza por epígrafes de manera que le resulte más fácil su revisión y comprensión por parte del lector. Finalmente cada capítulo presenta sus conclusiones, además de las conclusiones generales, recomendaciones, bibliografía y anexos.

En el Capítulo I se realiza un estudio de los fundamentos teóricos y la evolución histórica de las técnicas para el control de sistemas robóticos, en particular las técnicas: control PD, CTC y CMD aplicadas a un robot articular de 2 GDL para el seguimiento de trayectorias en línea recta. Además se presentan los modelos matemáticos de un robot de 2 GDL.

## CAPÍTULO I. Caracterización de las estrategias empleadas para el control de robots manipuladores

### Introducción

En este capítulo se realiza un estudio de los fundamentos teóricos y la evolución histórica de las técnicas para el control de sistemas robóticos, en particular las técnicas: control PD, CTC y CMD aplicadas a un robot articular de 2 GDL para el seguimiento de trayectorias en línea recta. Además se presentan los modelos matemáticos de un robot de 2 GDL.

### 1.1 Caracterización teórica de los robots manipuladores.

En general, se dice que un robot manipulador es un sistema mecánico compuesto por  $n$  eslabones, los cuales están interrelacionados por  $n$  uniones o articulaciones, cada una controlada por un actuador que proporciona el movimiento mecánico a la articulación correspondiente, con el fin de que el robot manipulador efectúe una tarea deseada, tal como, el movimiento de articulaciones a una posición deseada, o bien, que se procure seguimiento a una trayectoria predeterminada, tal como se muestra en la Figura 1.1. Cabe mencionar que 1 GDL corresponde al movimiento en una dimensión por lo que los GDL de un robot se obtiene sumando los GDL que se tienen de cada una de sus articulaciones.

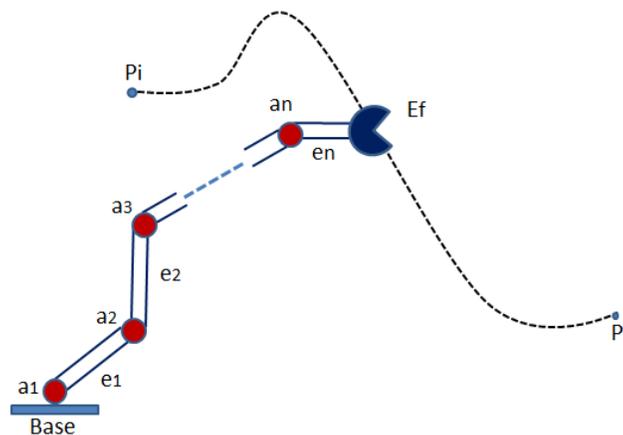


Figura 1.1. Robot manipulador de  $n$  GDL.

Donde el  $E_f$ , debe ir de una posición inicial  $P_i$  a una posición final  $P_f$ , siguiendo una trayectoria denotada por una línea de punteada. Para lograr dicho objetivo se debe

aplicar señales adecuadas a los actuadores para que estos a su vez, generen los movimientos mecánicos necesarios en las articulaciones. Lo anterior también se logra mediante el diseño de un controlador, el cual automáticamente genera las señales necesarias para cumplir dicho objetivo. En el proceso de diseño del controlador es necesario conocer el modelo del sistema a controlar, en este caso el modelo del robot manipulador.

### 1.1.1 Modelos Cinemáticos de un Robot de 2 GDL

La cinemática del robot estudia el movimiento del robot respecto a un sistema de referencia. Se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre posición y orientación del extremo del robot con los valores que toman sus coordenadas articulares. Además trata de encontrar las relaciones entre velocidades del movimiento de las articulaciones y las del extremo (Kelly, Santibáñez y Loría 2005).

Existen dos problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot. El problema cinemático directo, que consiste en hallar la posición y orientación del extremo final con respecto a un sistema de coordenadas de referencia a partir de los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot. El segundo es el problema cinemático inverso, permite hallar las variables articulares conocida la posición y orientación del extremo de la cadena cinemática, en otras palabras se resuelve la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo conocidas, ver Figura 1.2.

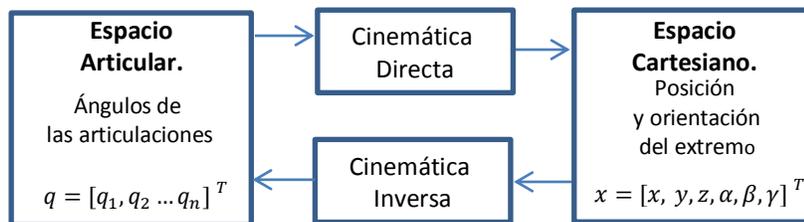


Figura 1.2. Problemas cinemáticos directo e inverso.

Denavit y Hartenberg [1955] propusieron un enfoque sistemático y generalizado de utilizar álgebra matricial para describir y representar la geometría espacial de los elementos del brazo del robot con respecto a un sistema de referencia fijo. Este método utiliza una matriz de transformación homogénea  $[4 \times 4]$  para describir la relación espacial entre dos elementos mecánicos articulares adyacentes y reduce el problema cinemático directo a encontrar una matriz de transformación homogénea que relaciona el desplazamiento espacial del sistema de coordenadas del efector

final o extremo al sistema de coordenadas de referencia. Estas matrices de transformación homogéneas son también útiles en derivar las ecuaciones dinámicas de movimiento del brazo del robot (Barrientos , y otros 1997).

Otro método utilizado para darle solución a los problemas fundamentales de la cinemática del robot son los métodos geométricos muy utilizados cuando se trata de robots de pocos GDL. Los métodos geométricos normalmente permiten obtener los valores de las primeras variables articulares, que son las que consiguen posicionar el robot (prescindiendo de la orientación de su extremo). Para ello utilizan relaciones trigonométricas y geométricas sobre los elementos del robot. Se suele recurrir a la resolución de triángulos formados por los elementos y articulaciones del robot que, en ocasiones, dan lugar a un número infinito de soluciones. (Acosta y Sigut 2005)

### Obtención del Modelo Cinemático Directo

El Modelo Cinemático Directo (MCD) consiste en hallar la posición y orientación del extremo final con respecto a un sistema de coordenadas de referencia a partir de los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot para ello se parte de la Figura 1.3, donde se muestran los marcos coordenados de un robot articular de 2 GDL.

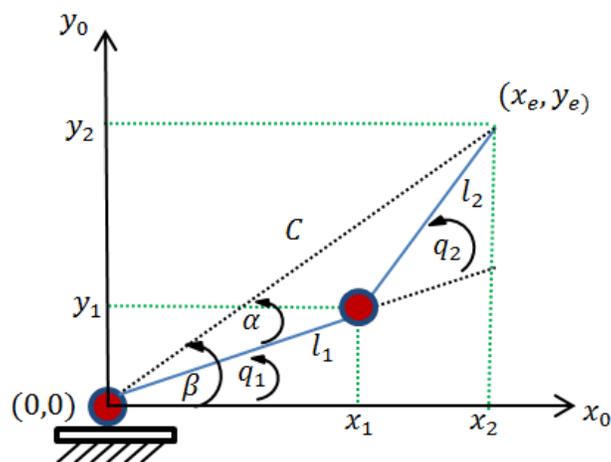


Figura 1.3. Marcos coordenados para robot articular de 2 GDL.

A partir de la Figura 3 y utilizando razones trigonométricas:

Eje  $x$ :

$$x_1 = l_1 \cos q_1;$$

$$x_2 = x_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2);$$

Eje y:

$$y_1 = l_1 \sin q_1;$$

$$y_2 = y_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2);$$

Las coordenadas de posición del efector final  $(x_e, y_e)$  son expresadas como:

$$x_e = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2); \quad (1.1)$$

$$y_e = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2); \quad (1.2)$$

donde:

$l_1$ : Longitud eslabón 1.

$l_2$ : Longitud eslabón 2.

$q_1$ : Posición articular del eslabón 1.

$q_2$ : Posición articular del eslabón 2.

$x_e$ : Punto en el eje x donde se encuentra ubicado el extremo.

$y_e$ : Punto en el eje y donde se encuentra ubicado el extremo.

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) representan el MCD de un robot de 2 GDL.

### Obtención del Modelo Cinemático Inverso

El Modelo Cinemático Inverso (MCI) se utiliza para determinar las variables articulares conocida la posición del extremo del robot. Partiendo de la Figura 3 y planteando la identidad trigonométrica fundamental se tiene que:

$$\sin^2 q_2 + \cos^2 q_2 = 1; \quad (1.3)$$

Despejando de (1.3) el  $\sin q_2$  se tiene:

$$\sin q_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_2}; \quad (1.4)$$

Utilizando el Teorema del coseno se tiene que:

$$x_e^2 + y_e^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos q_2;$$
$$\text{luego } \cos q_2 = \frac{x_e^2 + y_e^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}, \quad (1.5)$$

Se conoce la identidad  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , al aplicarla para  $q_2$  utilizando (1.4) y (1.5) se obtiene:

$$q_2 = \tan^{-1} \left( \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_2}}{\cos q_2} \right); \quad (1.6)$$

Conocida  $q_2$ , encontramos a  $q_1$ :

$$q_1 = \beta - \alpha; \quad (1.7)$$

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{y_e}{x_e} \right); \quad (1.8)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{l_2 \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2} \right); \quad (1.9)$$

por lo que:

$$q_1 = \tan^{-1} \left( \frac{y_e}{x_e} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{l_2 \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2} \right); \quad (1.10)$$

Las ecuaciones (1.10) y (1.6) representan el MCI de un robot de 2 GDL.

### 1.1.2 Modelo Dinámico de un Robot de 2 GDL

La obtención del modelo dinámico de un determinado mecanismo, y en particular de un robot, se basa fundamentalmente en el planteamiento del equilibrio de fuerzas establecido en la segunda ley de Newton, o su equivalente para movimientos de rotación, la denominada ley de Euler. Estas relaciones pueden ser expresadas matemáticamente por un conjunto de ecuaciones diferenciales, comúnmente llamadas Ecuaciones de Movimiento (E.O.M.). (G. Valencia 2008)

Del planteamiento del equilibrio de fuerzas y pares que intervienen sobre el robot se obtienen los denominados modelos dinámicos directo e inverso, que consisten en lo siguiente:

- *Modelo dinámico directo (MDD)*: expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares del robot en función de las fuerzas y pares que intervienen.
- *Modelo dinámico inverso (MDI)*: expresa las fuerzas y pares que intervienen en función de la evolución de las coordenadas articuladas y sus derivadas.

El planteamiento del equilibrio de fuerzas en un robot real de 5 ó 6 grados de libertad es bastante complejo y debe tenerse en cuenta que, junto con las fuerzas de inercia y gravedad, aparecen fuerzas de Coriolis debidas al movimiento relativo existente entre los distintos elementos, así como fuerzas centrípetas que dependen de la configuración instantánea del manipulador.

Como planteamiento alternativo para la obtención del modelo dinámico está la formulación lagrangiana, basada en consideraciones energéticas. Este

## Capítulo I

planteamiento es más sistemático y más elegante desde el punto de vista matemático que el anterior y, por lo tanto, facilita enormemente la formulación de un modelo tan complejo como el de un robot. Sin embargo, el costo computacional de la formulación lagrangiana es muy superior al de la formulación newtoniana (Acosta y Sigut 2005).

El análisis de modelos dinámicos de robots es un área de intenso estudio por parte de los diseñadores de robots, así como de los centros de investigación, ya que esta ofrece grandes retos tanto teóricos como prácticos. Más importante aún, el estudio de modelos dinámicos es indispensable en ciertas aplicaciones que no pueden ser realizadas mediante los robots comerciales. Actualmente, se considera que no se puede realizar la construcción de un robot articular sin el análisis previo de su modelo dinámico asociado, cuando se requiere que este realice tareas de alta precisión (Maldonado del Toro y Silva Ortigoza 2011).

En Maldonado del Toro se obtiene el MDD de un robot articular de dos grados de libertad, mostrado en la Figura 1.4, donde se emplea el método de Euler-Lagrange que se basa en el principio de conservación de la energía (Maldonado del Toro y Silva Ortigoza 2011).

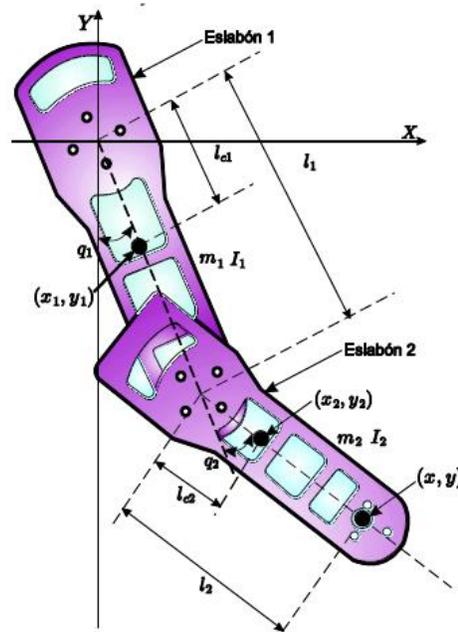


Figura 1.4. Robot articular de 2 GDL.

De acuerdo al método de Euler-Lagrange las E.O.M. que gobiernan a un robot articular de  $n$  GDL están determinadas por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau \quad (1.11)$$

Siendo:

$q(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$  y  $\dot{q}(t) = [\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)]^T$ , la posición y la velocidad angular de los eslabones respectivamente.

Donde  $\dot{q} = \frac{d}{dt}q$ , representa la derivada con respecto al tiempo  $t$  de la posición angular y  $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_n]^T$  el vector de controles o torques aplicados al robot.

Donde  $L(q, \dot{q})$  denota el lagrangiano del sistema, definido por la diferencia entre la energía cinética,  $K(q(t), \dot{q}(t))$ , y la energía potencial  $U(q(t))$  de un robot articular de  $n$  GDL es decir:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)) \quad (1.12)$$

En el caso de dos grados de libertad, la energía cinética y potencial de los eslabones están determinadas por:

$$K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}) \quad (1.13)$$

$$U(q) = U_1(q) + U_2(q) \quad (1.14)$$

De esta manera, para obtener el modelo matemático de un robot de 2 GDL se parte (1.11). Para encontrar la energía cinética asociada a los eslabones 1 y 2, se consideraron los centros de masas de cada eslabón  $l_{c1}$  y  $l_{c2}$ . De acuerdo a (1.13), la energía cinética asociada al sistema está determinada por:

$$\begin{aligned} K(q, \dot{q}) &= K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}) \\ &= \left[ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.15)$$

Donde  $m_1$  y  $m_2$  denotan las masa de los eslabones,  $I_1$  e  $I_2$  representan los momentos de inercia del eslabón 1 y 2 respectivamente,  $v_1$  y  $v_2$  son la rapidez del centro de masa de los eslabones, cuya representación en términos de coordenadas cartesianas es  $v_1 = (\dot{x}_1 \ \dot{y}_1)^T$  y  $v_2 = (\dot{x}_2 \ \dot{y}_2)^T$

A su vez, las coordenadas del centro de masa del eslabón 1 en el plano X-Y son:

$$(x_1, y_1) = (l_{c1} \sin(q_1), -l_{c1} \cos(q_1)) \quad (1.16)$$

Las coordenadas para el centro de masa del eslabón 2 quedan expresadas por:

$$(x_2, y_2) = (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2), -l_1 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_1 + q_2)) \quad (1.17)$$

En consecuencia el vector de velocidad de dichos eslabones es:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Por lo que la velocidad al cuadrado de cada eslabón resulta ser:

$$v_1^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2,$$

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) \quad (1.19)$$

De esta manera las energías cinéticas asociadas a cada eslabón del robot articular están determinadas por:

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$$

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2$$

$$+ m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \quad (1.20)$$

Por otro lado, la energía potencial asociada a los eslabones de la Figura 4, de acuerdo a (1.14), están determinadas por:

$$U(q) = U_1(q) + U_2(q) = [-m_1 l_{c1} g \cos(q_1)] + [-m_2 l_1 g \cos(q_1)$$

$$- m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)] \quad (1.21)$$

Sustituyendo en (1.20) y (1.21), en (1.12) se obtiene el lagrangiano del robot articular de 2 GDL.

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \dot{q}_1^2$$

$$+ m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_1 l_{c1} g \cos(q_1)$$

$$+m_2 l_1 g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \quad (1.22)$$

De acuerdo a (1.11), las E.O.M. para un robot articular de 2 GDL quedan dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_1} = \tau_1 \quad (1.23a)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_2} = \tau_2 \quad (1.23b)$$

Desarrollando las ecuaciones de movimiento (1.23a) y (1.23b), se obtiene para el eslabón 1, lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2] \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ &\quad + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) [2\dot{q}_1 + \dot{q}_2] + I_1 \dot{q}_1 + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 \\ &\quad + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_2 \\ &\quad - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &\quad - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + I_1 \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} = -[m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) - m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2) \quad (1.26)$$

Mientras que para el eslabón 2 se tiene que:

$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1 + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right] &= m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 \\ &\quad - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] - m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2) \quad (1.29)$$

Finalmente las ecuaciones de movimiento para el robot articular de 2 GDL mostrado en la Figura 3, quedan determinadas por:

$$\begin{aligned}\tau_1 = & [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 \\ & + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + I_1 \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \\ & + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2)\end{aligned}\quad (1.30)$$

$$\begin{aligned}\tau_2 = & m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 \\ & + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2)\end{aligned}\quad (1.31)$$

El modelo del sistema (1.30)-(1.31) puede escribirse en la forma general:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)\quad (1.32)$$

Donde  $\tau \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de torques (entradas de control),  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  y  $g(q)$  son las matrices de inercia, fuerzas centrífugas y de coriolis, y el vector de pares gravitacionales, respectivamente.

La ecuación (1.32) se representa para 2 GDL como sigue:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}\quad (1.33)$$

Tal que:

$$M_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2\quad (1.34)$$

$$M_{12}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2\quad (1.35)$$

$$M_{21}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2\quad (1.36)$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_{c2}^2 + I_2\quad (1.37)$$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2\quad (1.38)$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]\quad (1.39)$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1\quad (1.40)$$

$$C_{22}(q, \dot{q}) = 0 \quad (1.41)$$

$$g_1(q) = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2) \quad (1.42)$$

$$g_2(q) = m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2) \quad (1.43)$$

La ecuación (1.33) representa el MDD de un robot de 2 GDL y a las ecuaciones desde la (1.34) - (1.43) se denominan “ecuaciones de las componentes dinámicas” del modelo dinámico del robot.

### **1.1.3 Planificación de la trayectoria y control de movimiento del manipulador. Tipos de Trayectorias**

Con el conocimiento de la cinemática y la dinámica de un manipulador, sería interesante mover los actuadores de sus articulaciones para cumplir una tarea deseada controlando al manipulador para que siga un camino previsto.

El planificador de la trayectoria (o generador de trayectoria) interpola y/o aproxima la trayectoria deseada por una clase de funciones polinomiales y genera una secuencia de puntos de consignas de control en función del tiempo para el control del manipulador desde la posición inicial hasta el destino. (Fu, González y Lee 2005)

Para realizar una tarea determinada el robot debe moverse desde un punto inicial a un punto final. Este movimiento puede ser realizado según infinitas trayectorias espaciales. De todas ellas hay algunas que, bien por su sencillez de implementación por parte del control cinemático o bien por su utilidad y aplicación a diversas tareas, son las que en la práctica incorporan los robots comerciales. De este modo, puede encontrarse que los robots dispongan de trayectorias punto a punto, coordinadas y continuas (Albites, y otros 2010).

#### **1.1.3.1 Trayectorias punto a punto**

En este tipo de trayectorias cada articulación evoluciona desde su posición inicial a la final sin realizar consideración alguna sobre el estado o evolución de las demás articulaciones.

Normalmente, cada actuador trata de llevar a su articulación al punto de destino en el menor tiempo posible, pudiéndose distinguir dos casos: movimiento eje a eje y movimiento simultáneo de ejes.

##### *Movimiento eje a eje.*

Sólo se mueve un eje cada vez. Comenzará a moverse la primera articulación, y una vez que ésta haya alcanzado su punto final lo hará la segunda, y así sucesivamente. Este tipo de movimiento da obviamente como resultado un mayor

tiempo de ciclo, teniendo como única ventaja un menor consumo de potencia instantánea por parte de los actuadores.

### *Movimiento simultáneo de ejes.*

En este caso todos los actuadores comienzan simultáneamente a mover las articulaciones del robot a una velocidad específica para cada una de ellas. Dado que la distancia a recorrer y las velocidades serán en general diferentes, cada una acabará su movimiento en un instante diferente.

El movimiento del robot no acabará hasta que se alcance definitivamente el punto final, lo que se producirá cuando el eje que más tarde concluya su movimiento. De esta manera, el tiempo total invertido en el movimiento coincidirá con el del eje que más tiempo emplee en realizar su movimiento particular, pudiéndose dar la circunstancia de que el resto de los actuadores hayan forzado su movimiento a una velocidad y aceleración elevada, viéndose obligados finalmente a esperar a la articulación más lenta. (Kern 2011)

### **1.1.3.2 Trayectorias coordinadas**

Para evitar que algunos actuadores trabajen forzando sus velocidades y aceleraciones, teniendo que esperar después la conclusión del movimiento de la articulación más lenta, puede hacerse un cálculo previo, averiguando cuál es esta articulación y qué tiempo invertirá. Se ralentizará entonces el movimiento del resto de los ejes para que inviertan el mismo tiempo en su movimiento, acabando todos ellos simultáneamente. Se tiene así que todas las articulaciones se coordinan comenzando y acabando su movimiento a la vez, adaptándose todas a la más lenta.

El tiempo total invertido en el movimiento es el menor posible y no se piden aceleraciones y velocidades elevadas a los actuadores de manera inútil. Desde el punto de vista del usuario la trayectoria que describe el extremo del robot no es significativa, siendo ésta impredecible, aunque como es obvio, un conocimiento del modelo y control cinemático del robot permitiría su cálculo.

### **1.1.3.3 Trayectorias continuas**

Cuando se pretende que la trayectoria que sigue el extremo del robot sea conocida por el usuario (trayectoria en el espacio cartesiano o de la tarea), es preciso calcular de manera continua las trayectorias articulares.

Típicamente, las trayectorias que el usuario pretende que el robot describa son trayectorias en línea recta o en arco de círculo.

En la Figura 1.5 se representan las trayectorias articulares  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  y el resultado final en el espacio del área (x, y) para un robot de 2 GDL, correspondientes a los cuatro tipos de trayectorias antes mencionadas.

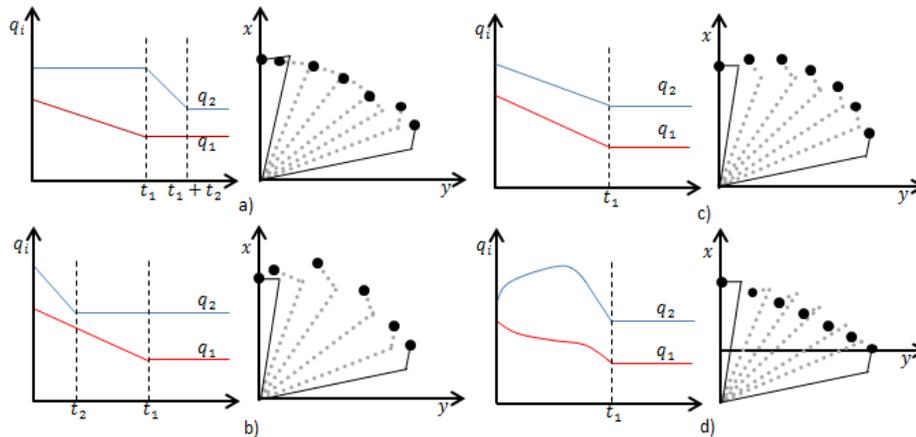


Figura 1.5. Diferentes trayectorias articulares posibles para un robot de 2 GDL:  
a) Movimiento eje a eje, b) Movimiento simultáneo de ejes, c) Trayectoria coordinada, d) Trayectoria continua rectilínea.

## 1.2 Caracterización de las estrategias para el control de posición de robots manipuladores de $n$ GDL.

El control de posición del extremo de un robot manipulador está compuesto por el Control Cinemático y el Control Dinámico.

### 1.2.1 Control cinemático

El control cinemático establece cuáles son las trayectorias que debe seguir cada articulación del robot a lo largo del tiempo para lograr los objetivos fijados por el usuario (punto de destino, trayectoria cartesiana del efector final del robot, tiempo invertido por el usuario, etc.). Estas trayectorias se seleccionan atendiendo a las restricciones físicas propias de los accionamientos y a ciertos criterios de calidad en la trayectoria, como suavidad en los movimientos o precisión de la misma (Barrientos, y otros 1997).

#### Funciones de control cinemático.

La Figura 1.6 muestra de manera esquemática el funcionamiento del control cinemático, que recibe como entradas los datos procedentes del programa del robot escrito por el usuario (punto de destino, precisión, tipo de trayectoria deseada, velocidad o tiempo invertido, etc.) y, apoyándose en el modelo cinemático del robot, establece las trayectorias para cada articulación como funciones del tiempo. Estas trayectorias deben ser muestreadas con un período  $T$  a decidir, generándose en cada instante de tiempo  $kT$  un vector de referencias articulares para los algoritmos de control dinámico (Acosta y Sigut 2005).

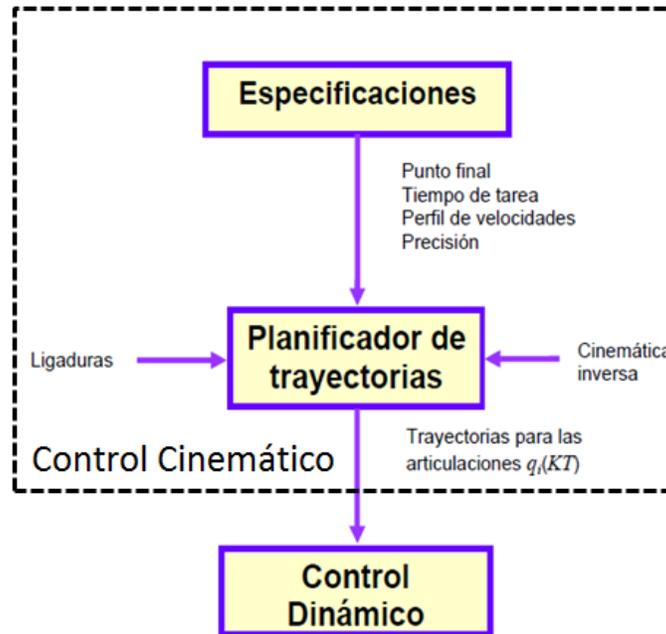


Figura 1.6. Funcionamiento del control cinemático.

### 1.2.2 Control dinámico

El control cinemático selecciona las trayectorias que idealmente deberá seguir el robot para, teniendo en cuenta sus limitaciones, ajustarse lo mejor posible a las especificaciones del movimiento dadas por el usuario. En la práctica, este ajuste del movimiento del robot a las especificaciones del usuario no será del todo posible, pues las características dinámicas del robot (inercias, rozamiento, holguras, etc.) impiden, en general, que las trayectorias real y deseada coincidan.

El control dinámico tiene como objetivo procurar que las trayectorias realmente seguidas por el robot  $q(t)$  sean lo más parecidas posible a las propuestas por el control cinemático como trayectorias deseadas  $q_d(t)$ , ver Figura 1.7. Para llevar a cabo esa tarea hace uso del conocimiento del modelo dinámico del robot y de las herramientas de análisis y diseño aportadas por la teoría de control (estabilidad de Lyapunov, control PID, control robusto, etc.).

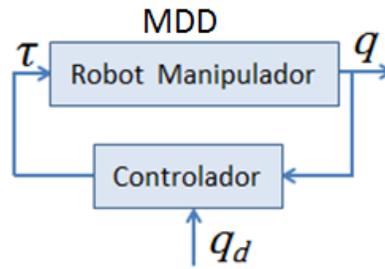


Figura 1.7. Robot manipulador en lazo cerrado.

El modelo dinámico de un robot es fuertemente no lineal, multivariable, acoplado y de parámetros variantes, por lo que, en general, su control es extremadamente complejo. Una posibilidad para controlar el movimiento articular es considerar un modelo de robot compuesto por la superposición de articulaciones totalmente independientes unas de otras, sin tener en cuenta la interacción entre ellas, que sin duda existe y condiciona el movimiento global. Por tanto, en esta situación el modelo dinámico empleado es directamente el correspondiente al accionador de una articulación. Este modo de control se conoce como control desacoplado o monoarticular. Su principal ventaja es su mayor simplicidad de cálculo y es habitual implementar controladores PID, controladores PD con compensación de gravedad. La principal desventaja surge en aquellas ocasiones en las que existe una gran influencia del movimiento de una articulación sobre el de las otras, y, por ende, sobre el movimiento global (Acosta y Sigut 2005).

El control acoplado o multiarticular se basa en un modelo de robot en el que se considera el modelo dinámico global del mismo, es decir, se tiene en cuenta la influencia de los movimientos de las articulaciones entre sí. Está claro que, desde el punto de vista analítico, este planteamiento resulta más complejo. Las técnicas de control utilizadas son las basadas en control PID y control por prealimentación, ampliamente extendidas, utilizándose también en ocasiones la linealización por inversión del modelo. También se emplean técnicas de control más potentes, como el control robusto.

En general, el problema de control de movimientos consiste en:

- 1- Obtener el MDD del manipulador.
- 2- Utilizar este modelo para determinar leyes o estrategias de control para conseguir la respuesta y el funcionamiento del sistema deseado. (Fu, González y Lee 2005)
- 3-

### 1.2.2.1 Control Proporcional Derivativo.

El control proporcional más retroalimentación de velocidad es el controlador a lazo cerrado más simple que puede ser usado para controlar robots manipuladores. La aplicación conceptual de esta estrategia de control es común en el control de posición angular de motores de corriente directa. En esta aplicación, el controlador

es conocido también como control proporcional con retroalimentación tacométrica (Kelly, Santibáñez y Loria 2005). La ecuación del control proporcional más retroalimentación de velocidad es dado por:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} \quad (1.44)$$

Donde  $K_p, K_v \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas positivas definidas preseleccionadas por el diseñador y se refieren comúnmente a la ganancia de posición y ganancia de velocidad (o derivativa), respectivamente.

El vector  $q_d \in \mathfrak{R}^n$  corresponde con la posición deseada de la articulación seleccionada, y el vector  $\tilde{q} = q_d - q \in \mathfrak{R}^n$  es llamado error de posición. En la Figura 1.8 se presenta el diagrama en bloques del sistema de control proporcional más retroalimentación de velocidad para un robot manipulador.

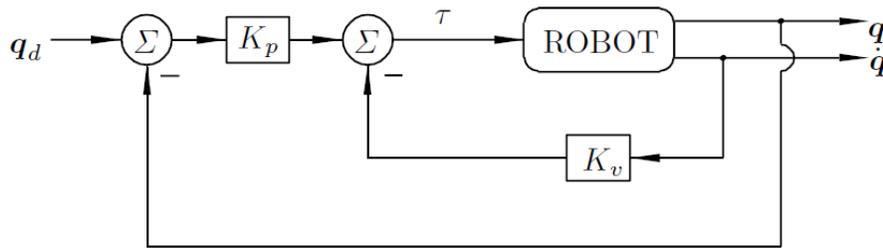


Figura 1.8. Diagrama en bloques del sistema de control proporcional más retroalimentación de velocidad.

Un controlador Proporcional-Derivativo (PD) es una extensión inmediata del control proporcional más retroalimentación de velocidad. Como sugiere su nombre, la ley de control no está compuesta solo por el término proporcional al error de posición como en el caso de control proporcional, también por otro término que es proporcional a la derivada del error de posición, conocido como error de velocidad  $\dot{\tilde{q}}$ . La ley de control PD está dada por:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} \quad (1.45)$$

Donde  $K_p, K_v \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  son también matrices simétricas positivas definidas preseleccionadas por el diseñador. En la Figura 1.9 se presenta el diagrama de bloques correspondiente al sistema de control PD de un robot manipulador.

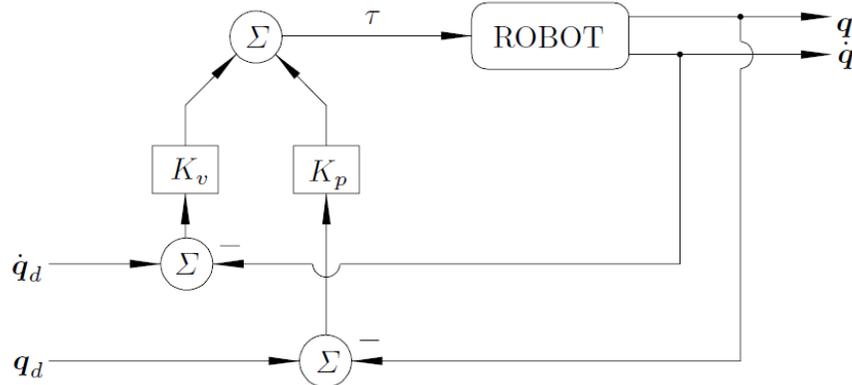


Figura 1.9. Diagrama en bloques del control PD de un robot manipulador.

En la literatura de control robótico encontramos que las leyes de control (1.44) y (1.45) son indistintamente llamadas control PD.

### 1.2.2.2 Control por Par Calculado

El modelo dinámico que caracteriza el comportamiento de los robots manipuladores se representa en la ecuación (1.32) está compuesto en general por funciones no lineales en variable estado (velocidad y posición de las articulaciones). Sin embargo existe un controlador que es también no lineal en variable de estado pero que nos conduce a un sistema de control a lazo cerrado que es descrito por ecuaciones diferenciales lineales (Kelly, Santibáñez y Loría 2005). Este control es capaz de completar el objetivo de control de movimiento, globalmente y más aún con una selección trivial de sus parámetros de diseño y recibe el nombre de Control por Par Calculado (CTC).

La ley de control del CTC es dado por la ecuación (1.46) donde  $K_v$  y  $K_p$  son matrices simétricas definidas positivas y  $\tilde{q} = q_d - q$  es el error de posición.

$$\tau = M(q)[\ddot{q}_d + K_p\tilde{q} + K_v\dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \quad (1.46)$$

Nótese que la ley de control (1.46) contiene los términos  $K_p\tilde{q} + K_v\dot{\tilde{q}}$ , lo que indica que el CTC es un controlador no lineal tipo PD, donde las ganancias de velocidad y posición dependen explícitamente del error de posición  $\tilde{q}$ .

El CTC fue uno de las primeras propuestas de controladores de movimiento basado en modelos creado para manipuladores y hace uso explícito de los conocimientos de las matrices  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  y vectores  $g(q)$ . Obsérvese que la trayectoria de movimiento deseada  $q_d(t)$ , y sus derivadas  $\dot{q}_d(t)$  y  $\ddot{q}_d(t)$ , así como

las mediciones posición  $q(t)$  y velocidad  $\dot{q}(t)$  son utilizadas para calcular la acción de control.

En la Figura 1.10 se muestra el diagrama en bloques del CTC para un robot manipulador.

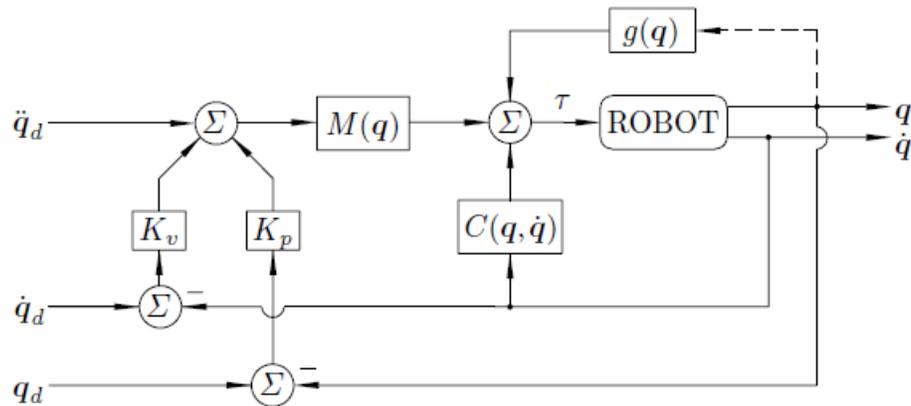


Figura 1.10. Diagrama en bloques del CTC.

### 1.2.2.3 Control por Modo Deslizante

La teoría de sistemas de CMD representa una parte fundamental de la teoría de sistemas no lineales propuesta en la antigua Unión Soviética por S.V. Emelyanov, Y. Itkis y V.A. Utkin en 1976. Esta ha sido exitosamente implementada en sistemas lineales y no lineales, algunas de sus aplicaciones son: control de seguimiento de trayectorias, control de convertidores de potencia, control de neutralización de pH, control de nivel, control de procesos químicos y aislamiento de vibraciones entre otros (Roque 2003).

Los sistemas de control de estructura variable son un tipo de sistema de control no lineal, en los que la estructura del controlador varía de tal forma que un punto representativo del sistema siga una trayectoria definida en el espacio de estados.

Un sistema de estructura variable se compone de dos o más subsistemas continuos y una lógica que realiza la conmutación entre ellos en función de los estados del sistema. La acción de control que resulta de esta ley de conmutación es una función discontinua de los estados. Un modo de operación particular se obtiene cuando las conmutaciones ocurren a frecuencia muy elevada, restringiendo la trayectoria de los estados del sistema a una variedad en el espacio de estados. Este modo de operación es llamado modo o régimen deslizante (MD) y presenta propiedades muy atractivas. Entre otras, es robusto a perturbaciones externas y a incertidumbre en los parámetros, el sistema de lazo

cerrado es de orden reducido, y su dinámica es gobernada mediante el diseño de la función de conmutación (Garelli 2007).

En el primer paso de diseño en CMD, es definir una función  $S(t)$ , tal que  $S(t) = 0$  defina una superficie, conocida como superficie, en el espacio de estados, ver Figura 1.11.

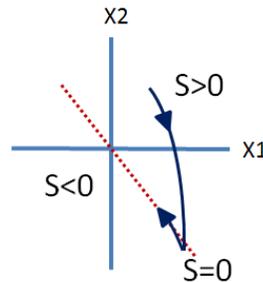


Figura 1.11. Superficie de deslizamiento  $S(x)=0$ .

Existen múltiples propuestas para determinar la superficie de deslizamiento y en general puede ser cualquier función del estado  $x$  tal que el error de regulación o seguimiento se haga cero en régimen permanente. Por simplicidad se considera la siguiente:

$$S(x) \cong x_i - k = 0 \quad (1.47)$$

Donde  $x_i$  es una de las variables de estado del sistema y  $k$  una constante de tipo real, tal que en régimen permanente  $x_i$  llegue a ser el valor deseado de  $k$ .

Una de las propiedades más interesantes de los sistemas de estructura variable es la posible existencia de modos deslizantes en las superficies de discontinuidad de la estructura. Si la trayectoria del sistema alcanza las proximidades de una región (superficie de deslizamiento) en la que existe un modo deslizante, el movimiento ya no se alejará de la región excepto posiblemente en las fronteras de la región.

Por ejemplo, si para un sistema de estructura variable de segundo orden existe un modo deslizante en un segmento del plano de fase  $S(x)$ , mostrado en la Figura 1.12, se observa que el sistema presenta una dinámica denotada como  $\dot{x} = f_2(x, t)$  cuando se encuentra por encima de la superficie de deslizamiento a la que se conoce como vector de velocidades positivas ( $f^+$ ) y otra denotada  $\dot{x} = f_1(x, t)$  cuando se encuentra por debajo de la superficie de deslizamiento  $S(x) = S$ , vector de velocidades negativas ( $f^-$ ) (Roque 2003).

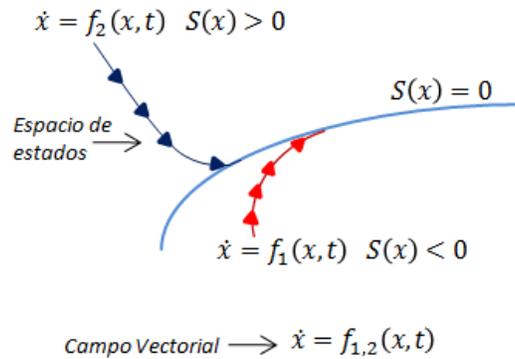


Figura 1.12. Trayectorias en el plano de fase de un sistema de estructura variable.

Uno de los enfoques matemáticos más utilizados para establecer las condiciones de existencia del modo deslizante se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow 0^+} f_N^+ < 0 &\rightarrow \lim_{S \rightarrow 0^+} \nabla S f_N^+ < 0 \\ \lim_{S \rightarrow 0^-} f_N^- > 0 &\rightarrow \lim_{S \rightarrow 0^-} -\nabla S f_N^- > 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

Donde se indican con el subíndice  $N$  a los vectores ortogonales a superficie deslizante y  $\nabla S$  el gradiente de la superficie.

Entonces la derivada de  $S(t)$  queda definida por:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \nabla S(x) \dot{x} \quad (1.49)$$

Luego la existencia del MD es dada por:

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow 0^+} \frac{dS}{dt} < 0 \\ \lim_{S \rightarrow 0^-} \frac{dS}{dt} > 0 \end{aligned} \rightarrow \lim_{S \rightarrow 0} S \frac{dS}{dt} < 0 \quad (1.50)$$

Cuando la expresión obtenida en (1.50) se mantiene para todo espacio de estados y no solamente en una región de vecindad alrededor de la superficie deslizante, entonces esta condición es suficiente para alcanzar la superficie deslizante.

Para que  $S = 0$  atraiga las trayectorias se propone una función candidata de Lyapunov tal que:

$$V(S) = \frac{1}{2} S^2; \quad (1.51)$$

la cual es definida positiva con respecto a  $S$ , luego la derivada en el tiempo es:

$$\dot{V}(S) = S\dot{S}; \quad (1.52)$$

y se debe cumplir que  $S\dot{S} < 0$ , para que la trayectoria de los estados del sistema se dirijan a la superficie deslizante decir:

$$\dot{V}(S) < 0; \quad (1.53)$$

### Obtención de la ley de CMD aplicada a robot manipulador de $n$ GDL

Podemos expresar (1.32) de la siguiente forma general como:

$$\ddot{q} = M^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)] \quad (1.54)$$

Se conoce que:

$\tilde{q} = q_d - q$ , es el error de posición articular.

$\dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q}$ , es el error de velocidad articular.

Para obtener la ley de CMD se debe satisfacer la condición expresada en (1.52); para ello se impone la dinámica de la superficie deslizante de la forma:

$$\dot{S} = -K\text{sgn}(S); \quad (1.55)$$

donde  $\text{sgn}(S)$  es la conocida función *signo* definida como:

$$\text{sgn}(S) = \begin{cases} 1 & S > 0 \\ 0 & S = 0 \\ -1 & S < 0 \end{cases}$$

Se definen la superficie de deslizante:

$$S = \dot{\tilde{q}} + \hat{C} \tilde{q} \quad (1.56)$$

Derivando (1.56) se obtiene:

$$\dot{S} = \ddot{\tilde{q}} + \hat{C} \dot{\tilde{q}} \quad (1.57)$$

Luego,

$$\dot{S} = \ddot{q}_d - \ddot{q} + \hat{C}(\dot{q}_d - \dot{q}) \quad (1.58)$$

Sustituyendo (1.54) en (1.58) se tiene.

$$\dot{S} = \hat{C}(\dot{q}_d - \dot{q}) + \ddot{q}_d - M^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)] \quad (1.59)$$

Igualando (1.59) con (1.55) se puede despejar  $\tau$ :

$$\tau = M(q) \left[ \begin{array}{l} \hat{C}(\dot{q}_d - \dot{q}) + \ddot{q}_d + M^{-1}(q)C(q, \dot{q})\dot{q} \\ + M^{-1}(q)g(q) + Ks \operatorname{sgn}(S) \end{array} \right] \quad (1.60)$$

Donde (5.14) es la ley de control por modo deslizante para un robot manipulador de  $n$  GDL y  $K = [K_1, K_2, \dots, K_n] > 0$ , se debe de ajustar en un valor alto dependiendo de las incertidumbres del sistema (Bachenheimer y Martínez 2006).

Debido a que los puntos son atraídos por  $S$ , pero estos no llegan con precisión a la superficie se crea el fenómeno de “chattering”, ver Figura 1.13 (Roque 2003).

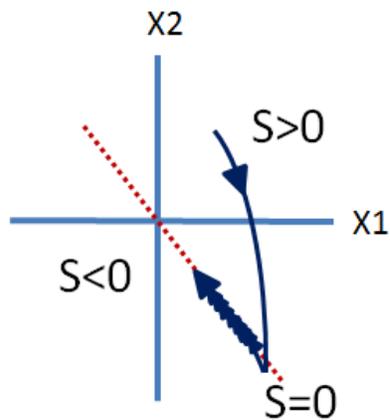


Figura 1.13. Fenómeno de “chattering” ( $S=0$ ).

Existen varias técnicas para eliminar el “chattering” la más conocida es remplazar la función signo de la ley de control, por la función saturación (Bachenheimer y Martínez 2006) y delimitar una capa de frontera  $\phi_i$  como se muestra en la Figura 1.14 (Bachenheimer y Martínez 2006).

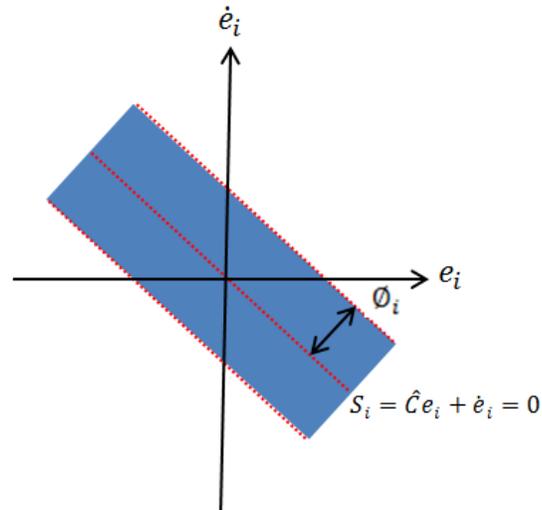


Figura 1.14. Superficie de deslizamiento y capa frontera.

$$sat(S) = \begin{cases} \text{sgn}(S), & |S| \geq \phi \\ \frac{S}{\phi}, & |S| < \phi \end{cases} \quad (5.15)$$

La función  $sat(S)$  hace que fuera de la capa frontera los puntos sean atraídos a la superficie y una vez dentro de la capa frontera estos se desplacen hacia el origen de una forma más suave como se muestra en la Figura 1.15.

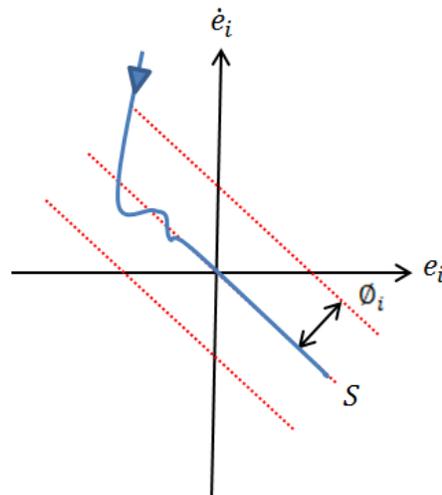


Figura 1.15. Función  $sat(S)$  para la eliminación del chattering.

### **1.3 Estado del arte de las estrategias de control aplicadas a sistemas robóticos**

En este epígrafe se tratará el estado actual de las estrategias CMD, PD y CTC aplicadas al control de sistemas robóticos.

#### **1.3.1 Control por Modo Deslizante**

En la actualidad el CMD tienen una elevada aceptación dentro de la comunidad científica e ingenieril debido a que se caracteriza por presentar gran simplicidad, insensibilidad a perturbaciones e incertidumbres y su alto grado de robustez en sistemas mecánicos (Romero, y otros 2004).

En las referencias de literatura se muestran las bondades que esta técnica brinda aplicadas al campo de la robótica. En el 2005 García, Zambrano y Camacho presentan un CMD aplicado a robots móviles con retardo para el seguimiento de caminos rectos, se compara el desempeño del CMD con dos técnicas de control clásicas: controladores de realimentación de estado y realimentación de la posición lateral y se muestra como el CMD permite controlar mejor la relación entre el retardo y la constante de tiempo del sistema (García Gabín, Zambrano, & Camacho, 2005).

La técnica de CMD se ha aplicado para: el control posición en un robot redundante tipo SCARA de cinco grados de libertad (Kern 2011) y el control de movimientos de alta precisión y velocidad de un robot laparoscópico (Pedroni, Cova y Mathé 2015).

La principal desventaja en la implementación de CMD es el fenómeno denominado efecto de ruido continuo o “Chattering” el cual se produce por la conmutación no ideal en los elementos actuadores, para disminuir este fenómeno se puede proponer reemplazar la función signo por la función saturación y conservar la robustez de controlador (Bachenheimer y Martínez 2006).

Por otra parte la teoría de CMD se ha combinado con la teoría de sistemas inteligentes tales como lógica difusa, redes neuronales y algoritmos genéticos. En el 2004 García y Zambrano presentan el diseño de un controlador predictivo por modo deslizante aplicado al modelo no lineal de un brazo robótico con fricción, el esquema presenta las ventajas del control predictivo en cuanto a desempeño y las de robustez debido al CMD, la respuesta se compara con la de un controlador predictivo clásico, luego en el 2006 Ortega implementa un controlador combinado CMD y redes neuronales para el control de posición de un robot manipulador que maneja cargas entre 0.1 y 0.5 kg, la combinación utilizada proporciona buena

respuesta dinámica ante grandes variaciones de los parámetros del sistema y de la referencia (Ortega 2006). En el 2007 Sebastian y Sotelo proponen la fusión del CMD con el control adaptivo borroso, aportando las bondades propias de cada estrategia. La aplicación práctica está basada en un modelo semi-acoplado y no lineal de un vehículo subacuático, compuesto por tres controladores independientes, uno para cada grado de libertad controlable (Sebastian y Sotelo 2007). Para corregir los efectos del chattering Gutierrez propone un enfoque híbrido entre el CMD y el control Fuzzy, los resultados experimentales demuestran las altas prestaciones del controlador propuesto a pesar de las restricciones del sistema sensorial y la incertidumbre del modelo teórico del vehículo (Gutierrez 2009).

### 1.3.2 Control por PD y CTC.

Las técnicas de control clásicas PD y CTC a pesar de ser las más empleadas en la robótica industrial debido a su sencilla implementación continúan siendo estudiadas y modificadas por los especialistas en control con el fin de utilizarlas como marco de referencia para la comparación con estrategias de control avanzadas. En (Vivas (2006)) se presenta una aplicación eficiente de un control por modelo de referencia sobre un robot de tipo SCARA. Con el fin de comparar diferentes estrategias de control, se diseña un controlador clásico tipo PID y dos controladores basados en el modelo de referencia. En este último caso el sistema se linealiza y se desacopla por realimentación, lo que transforma el sistema a controlar en un simple par de integradores. Al sistema lineal y desacoplado resultante se le aplica el control por par calculado y el control predictivo funcional. Los tres controladores estudiados se simulan sobre el robot SCARA con valores numéricos reales. Las pruebas permiten valorar las respuestas de estos controladores en seguimiento de trayectoria, rechazo de perturbaciones y presencia de errores en el modelado con consignas complejas similares a las utilizadas en procesos de fabricación.

En (Madrid, y otros 2007) se realiza el control de posición con estructura PID de un brazo robótico, considerando el método del control desacoplado. Con la generación de trayectorias se comprueba en base a simulaciones la dinámica del sistema en lazo cerrado. Por otro lado, la etapa de potencia amplifica las señales digitales de control a niveles de corriente adecuadas para activar los motores, a través de una estructura tipo Puente H y se aplica la técnica de modulación por ancho de pulso para el control de velocidad, la implementación en tiempo real del control del brazo se utilizan encoders, conectados en el eje del motor de cada articulación, para medir posición y velocidad.

## Capítulo I

En (Yarza y Santibáñez 2009) se presenta una propuesta de análisis de estabilidad por medio de la teoría de perturbaciones singulares, para tres controladores: PID, P“D” con compensación de gravedad, y PID no lineal mostrando de esta manera, las ventajas y desventajas de dicha teoría para el estudio de estabilidad de controladores de robots manipuladores.

En (Checa, Luna y Mosquera 2009) se describe las fases de la construcción de una simulación virtual de un robot SCARA de 4 grados de libertad. Se usó un modelo matemático realizado mediante el software SYMORO con los parámetros físicos de robot Adept Cobra 800i. El simulador construido permite usar 4 tipos de trayectorias predefinidas (circular, lineal, triangular, pick-up) usando dos tipos de control (PID, CTC). La aplicación obtenida fue validada con la simulación desarrollada en Matlab.

En (Torres y Méndez 2009) se realiza una revisión de las técnicas clásicas de control de manipuladores y se introduce un conjunto de técnicas novedosas de control robusto y de control predictivo, con las que se evitan los problemas de incertidumbre en los parámetros del modelo. En particular se describe un controlador con una acción robusta, necesaria para evitar los errores en la cancelación de términos no lineales de la dinámica del robot. El esquema es mejorado mediante técnicas predictivas que permiten la inclusión de las articulaciones de movimiento del robot en el algoritmo de control. Se incluyen resultados reales y en simulación en un robot PUMA-560 de Unimation que prueban la bondad de dichos controladores.

En (Albites, y otros 2010) se diseñan 3 tipos de controladores: PID, CTC y control Fuzzy basado en 9 reglas, aplicados a un robot de 3 GDL con capacidad de dibujo. Mediante simulación se compara el desempeño de cada estrategia de control.

En (Sorcia, y otros 2010) se presenta el modelado de un brazo robot de eslabón flexible de un grado de libertad acompañado del análisis, diseño, simulación e implementación en tiempo real de dos estrategias: Control PID Generalizado basado en el modelo lineal del sistema y Control Sin Modelo para seguimiento de trayectoria. Se realizó un análisis comparativo de estas metodologías de diseño, así como del desempeño de ambos esquemas. Tanto en simulación como la aplicación en tiempo real se obtuvieron resultados satisfactorios en el desempeño de los controladores propuestos.

En (Valencia, Turizo y Sanjuan 2011) se implementó en simulación un control por modelo de referencia tipo Controlador por Torque Calculado (CTC) sobre un robot manipulador tipo SCARA de cuatro grados de libertad, con miras a realizar un estudio de las bondades del algoritmo ante un conjunto de pruebas. El CTC es

una ley clásica en control de manipuladores industriales y usa la realimentación de una señal que cancela los efectos de gravedad, fricción, tensor de inercia del manipulador, fuerzas de coriolis y centrifugas. Las simulaciones realizadas permiten valorar las respuestas del controlador CTC en el seguimiento de trayectorias deseadas complejas muy comunes en el proceso de manufactura.

### **Conclusiones del Capítulo I**

1. El estudio de la caracterización teórica de los robots manipuladores, permitió obtener los modelos cinemáticos y el modelo dinámico de un robot articular de 2 GDL.
2. Se realizó un estudio de los fundamentos teóricos de las estrategias de control PD, CTC y CMD para aplicadas a un robot articular de 2 GDL.
3. La evolución histórica de las estrategias de control tratadas en esta investigación, demostró la utilización de las mismas aplicadas al campo de la robótica.

## Capítulo II. Diseño del Sistema de Control de posición de Robot articular de 2 GDL

### Introducción

En el presente capítulo se muestra el diseño y los resultados de simulación de las estrategias de control usadas para controlar la posición de un Robot articular de 2 GDL siguiendo una línea recta o ante una señal seno de referencia. Además se diseñan las funciones para la variación de parámetros del modelo dinámico (incertidumbres paramétricas) y se muestran los resultados del sistema de control ante estos cambios.

### 2.1 Diseño de las estrategias de control de posición de un Robot articular de 2 GDL

El control de posición del extremo del robot se realiza manipulando el torque suministrado a cada articulación, para lo cual se diseñan tres estrategias de control:

- Control Proporcional Derivativo.
- Control por Torque o Par Calculado.
- Control por Modo Deslizante.

Cada estrategia de control diseñada se utiliza para el seguimiento de la trayectoria generada (línea recta). En la Figura 2.1 se muestra el diagrama en bloques del sistema de control, el cual está compuesto por:

1. Generador de trayectorias.
2. MCI: Modelo cinemático inverso.
3. Controlador.
4. MDD: Modelo dinámico directo.
5. MCD: Modelo cinemático directo.

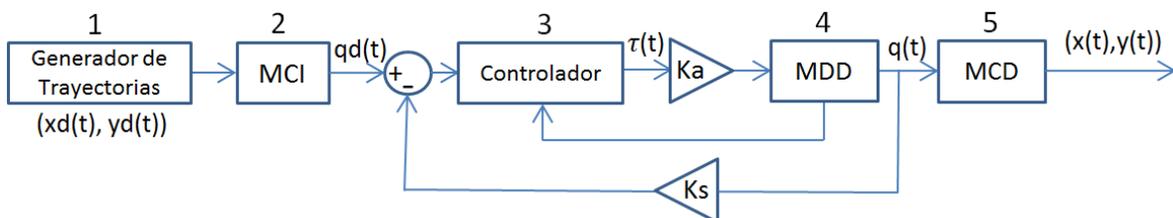


Figura 2.1. Diagrama en bloques general del sistema de control.

Donde las funciones de transferencia de los sensores de realimentación de la posición ( $K_s$ ) y de los actuadores para cada articulación ( $K_a$ ) se han considerado como ganancias unitarias para simplificar el diseño.

La descripción y diseño de los bloques antes mencionados se realiza a continuación.

### 2.1.1 Diseño del Generador de trayectorias

Como se explicó anteriormente el planificador de la trayectoria (o generador de trayectoria) interpola y/o aproxima la trayectoria deseada por una clase de funciones polinomiales y genera una secuencia de puntos de consignas de control en función del tiempo para el control del manipulador desde la posición inicial hasta el destino. En la presente investigación se utiliza una línea recta como trayectoria a seguir por el robot. Para lograr dicho objetivo se interpola la ecuación de una línea recta utilizando las ecuaciones:

Eje x.

$$x_d = \frac{(x_1 - x_2)}{2} \cos \frac{\min(t, T)\pi}{T} + \frac{(x_1 + x_2)}{2}; \quad (2.1)$$

donde:

$x_d$ : Son los valores resultantes de la interpolación para el eje x y posteriormente la referencia en el eje x al MCI.

$x_1$ : Es la posición inicial en el eje x que asigna el usuario.

$x_2$ : Es la posición final en el eje x que asigna el usuario.

$t$ : Es el vector de tiempo en segundos [s].

$T$ : Es la constante de tiempo en que el usuario desea que se realice la interpolación.

$\min(t, T)$  Es una función que se encarga de calcular el valor mínimo entre el vector de tiempo y la constante de tiempo definida por el usuario.

Eje y.

$$y_d = \frac{(y_1 - y_2)}{2} \cos \frac{\min(t, T)\pi}{T} + \frac{(y_1 + y_2)}{2}; \quad (2.2)$$

donde:

$y_d$ : Son los valores resultantes de la interpolación para el eje y, posteriormente la referencia en el eje y al MCI.

$y_1$ : Es la posición inicial en el eje y que asigna el usuario.

$y_2$ : Es la posición final en el eje y que asigna el usuario.

Para generar la trayectoria del movimiento es necesario conocer el espacio de trabajo del robot, lo que permite no generar una secuencia de puntos que puedan ser inalcanzables físicamente por las articulaciones, el diseño propuesto trabaja para valores de  $x$  y  $y$  positivos, o sea dentro del espacio de trabajo que se muestra en la Figura 2.2.

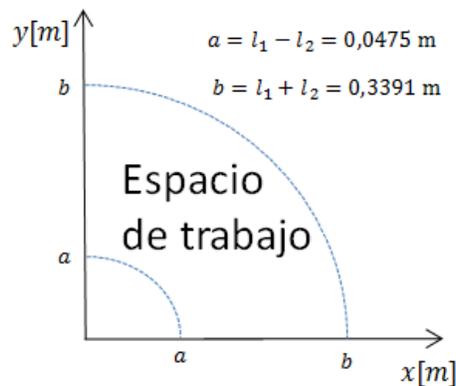


Figura 2.2. Eje de coordenadas del espacio de trabajo del robot.

Los valores de  $l_1$  y  $l_2$  y de otros parámetros considerados para las simulaciones se muestran en la Tabla 2.1 (Maldonado del Toro y Silva Ortigoza 2011).

Variable	Significado	Valor medido
$m_1$	Masa del eslabón 1	0.4272 kg
$m_2$	Masa del eslabón 2	0.3442 kg
$I_1$	Momento de inercia del eslabón 1	0.0036 kg m <sup>2</sup>
$I_2$	Momento de inercia del eslabón 2	0.0021 kg m <sup>2</sup>
$l_1$	Longitud del eslabón 1	0.1933 m
$l_2$	Longitud del eslabón 2	0.1458 m
$l_{c1}$	Longitud del centro de masa del eslabón 1	0.0741 m
$l_{c2}$	Longitud del centro de masa del eslabón 2	0.0485 m
$g$	Aceleración de la gravedad	9.81 m/s <sup>2</sup>

Tabla 2.1. Parámetros de simulación del robot de 2 GDL.

En la Figura 2.3 se muestran el bloque del Generador de Trayectorias implementado en Matlab utilizando (2.1) y (2.2) con los valores iniciales y finales de  $x$  y  $y$  para dos casos de trayectorias en línea recta generadas, llamados a partir de ahora como: Caso 1 y Caso 2.

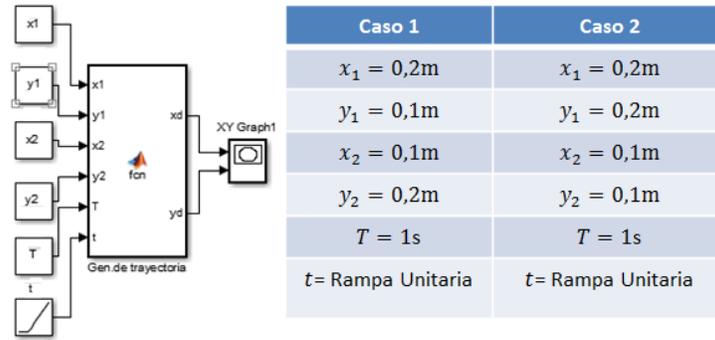


Figura 2.3. Bloque y parámetros del Generador de Trayectorias.

La Figura 2.4 muestra la salida en línea recta del generador de trayectoria para los Casos 1 y 2.

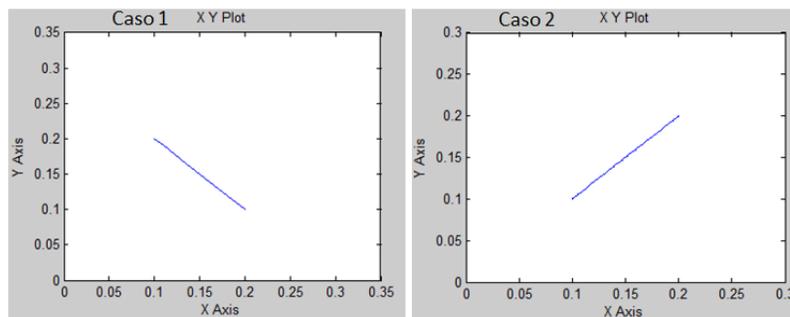


Figura 2.4. Trayectorias cartesianas generadas para los dos casos.

### 2.1.2 Diseño Modelo Cinemático Inverso

Sabiendo la posición que debe adoptar el extremo del robot en el espacio cartesiano (salida del generador de trayectorias), se determinan las variables de cada articulación (ángulos) en el espacio articular, para esto se utilizan las ecuaciones (1.6) y (1.10), donde a partir de ahora a la solución de (1.6) se denomina  $q_{d2}$  y la solución de (1.10) se denomina  $q_{d1}$ , las cuales representan las referencias angulares que debe tener cada articulación para lograr el posicionamiento en el espacio cartesiano predefinido. Para darle solución a lo planteado anteriormente se utiliza el bloque que se muestra en la Figura 2.5.



Figura 2.5. Bloque MCI.

El código interno del bloque de la Figura 2.5 se muestra en el Anexo 1.

En la Figura 2.6 se muestra el gráfico correspondiente en espacio articular ( $q_{d1}$  y  $q_{d2}$ ) para los valores de referencia de la posición en el espacio cartesiano ( $x_d$  y  $y_d$ ) de los casos antes mencionados.

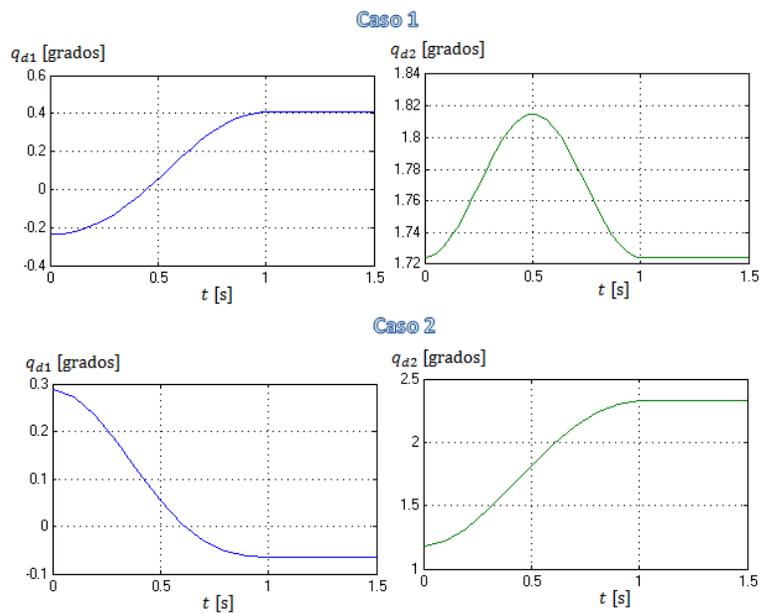


Figura 2.6. Evolución temporal de las posiciones articulares de referencias  $q_{d1}$  y  $q_{d2}$ , para los 2 casos de generación de trayectoria.

### 2.1.3 Diseño del Modelo Dinámico Directo

Como se había expresado anteriormente el modelo dinámico directo formula la evolución temporal de las coordenadas articulares del robot en función de las fuerzas y pares que intervienen. El bloque principal que representa el MDD es el que se muestra en la Figura 2.7, este utiliza los parámetros definidos en la Tabla 2.1.

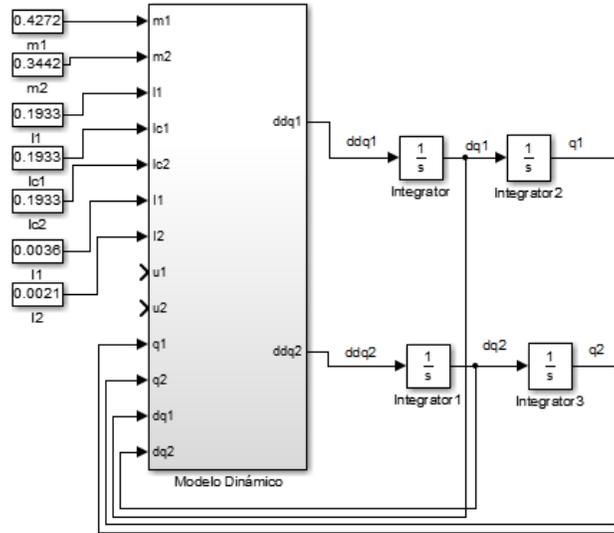


Figura 2.7. Bloque principal del MDD.

Para conformar el bloque es necesario despejar la ecuación (1.33) en función de las aceleraciones articulares  $\ddot{q}_1$  y  $\ddot{q}_2$  como sigue:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Luego se plantea una matriz  $N_{2 \times 2}$  como la inversa de  $M_{2 \times 2}$  y la ecuación (2.3) queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}; \quad (2.4)$$

de (2.4) se obtienen las aceleraciones articulares  $\ddot{q}_1$  y  $\ddot{q}_2$  como sigue:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 = & N_{11}\tau_1 - N_{11}C_{11}\dot{q}_1 - N_{11}C_{12}\dot{q}_2 - N_{11}g_1(q) + N_{12}\tau_2 - N_{12}C_{21}\dot{q}_1 \\ & - N_{12}C_{22}\dot{q}_2 - N_{12}g_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 = & N_{21}\tau_1 - N_{21}C_{11}\dot{q}_1 - N_{21}C_{12}\dot{q}_2 - N_{21}g_1(q) + N_{22}\tau_2 - N_{22}C_{21}\dot{q}_1 \\ & - N_{22}C_{22}\dot{q}_2 - N_{22}g_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Las entradas libres  $u_1$  y  $u_2$  del bloque principal representan los torques que se deben suministrar a cada articulación para lograr movimiento de la misma hasta una posición deseada.

Las salidas del bloque principal son las aceleraciones angulares de cada articulación  $ddq_1$  y  $ddq_2$  respectivamente, y son integradas dos veces, la primera vez para obtener las velocidades y la segunda para obtener las posiciones angulares, luego estas variables son realimentadas al bloque principal debido a que el MDD depende de ellas como se muestra en (2.5) y (2.6).

La composición interna del bloque principal se muestra en la Figura 2.8 y se basa en las ecuaciones llamadas componentes dinámicas, en donde: el bloque  $M^{-1}$  representa a la inversa de la matriz de inercia, para su diseño se utilizan las ecuaciones (1.34), (1.35), (1.36) y (1.37), el código interno del bloque se muestra en el Anexo 2; el bloque C representa a la matriz de fuerzas centrífugas y de coriolis, para su diseño se utilizan las ecuaciones (1.38), (1.39), (1.40) y (1.41) el código interno del bloque se muestra en el Anexo 3; el bloque G el vector de pares gravitacionales y para su diseño se utilizan las ecuaciones (1.42) y (1.43) el código interno del bloque se muestra en el Anexo 4 y el bloque Modelo Dinámico representa el MDD, para su diseño se utilizan las ecuaciones (2.5) y (2.6) el código interno del bloque se muestra en el Anexo 5.

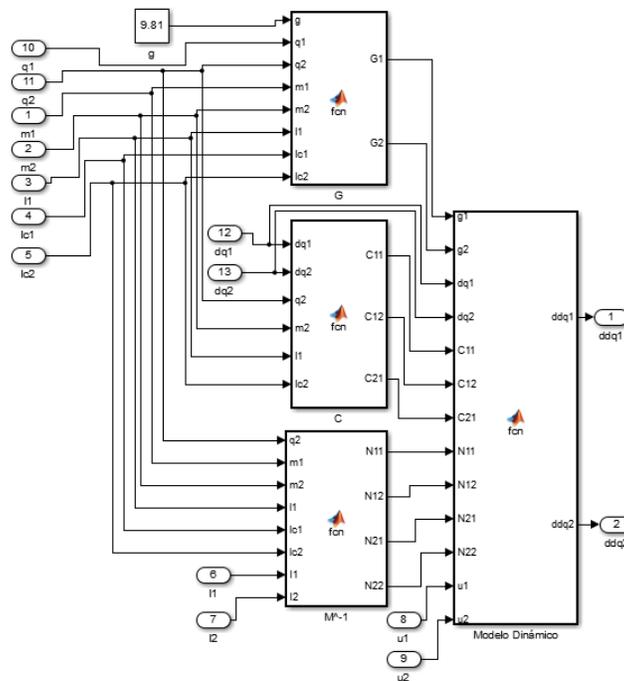


Figura 2.8. Composición interna del bloque principal del MDD.

### 2.1.4 Diseño del Modelo Cinemático Directo

El MCD consiste en hallar la posición y orientación del extremo final con respecto a un sistema de coordenadas de referencia a partir de los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot. El bloque que representa el MCD se muestra en la Figura 2.9, para su diseño se utilizan las ecuaciones (1.1) y (1.2), el código interno del bloque se muestra en el Anexo 6.

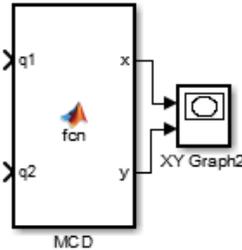


Figura 2.9. Bloque MCD.

Las entradas al bloque son las salidas de posición articular del MDD y las salidas del MCD son las coordenadas cartesianas del extremo del robot.

Antes de pasar al diseño de las tres estrategias de control se realiza una prueba de verificación de los MCI y MCD utilizando el generador de trayectorias, ver Figura 2.10, la prueba consiste en generar una trayectoria de referencia en coordenadas cartesianas, esta trayectoria el MCI la debe convertir en posiciones articulares, luego el MCD debe convertir nuevamente las posiciones articulares en posiciones en coordenadas cartesianas.

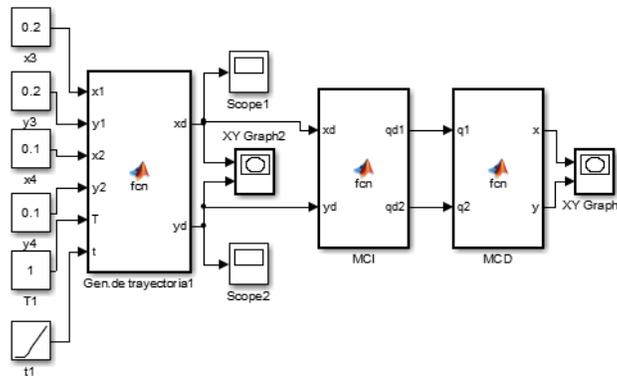


Figura 2.10. Prueba de verificación de MCI y MCD.

Los resultados de esta prueba se muestran en la Figura 2.11 y fueron calificados de satisfactorios demostrando la veracidad de los modelos diseñados.

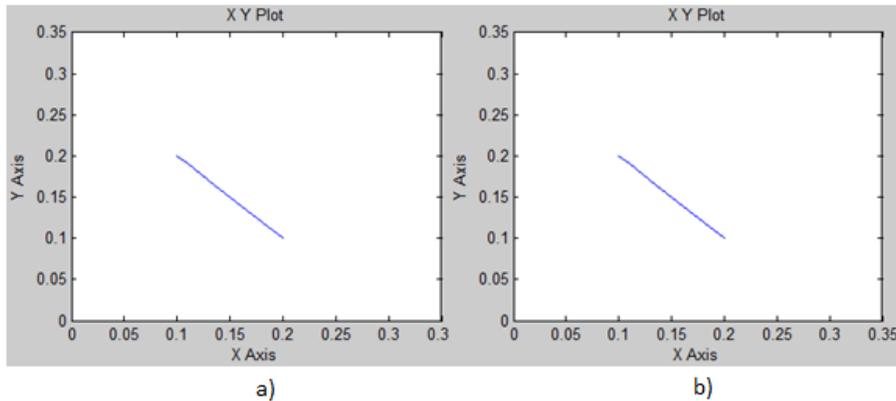


Figura 2.11. Resultados prueba de verificación: a) Trayectoria generada, b) Trayectoria obtenida.

### 2.1.5 Diseño del Controlador

En la presente investigación se diseñan tres estrategias para el control de posición de un robot articular de 2 GDL, posteriormente se realiza un estudio comparativo de las bondades que brinda cada técnica ante la presencia de incertidumbres paramétricas del modelo dinámico.

#### 2.1.5.1 Estrategia de Control Proporcional Derivativo

El control PD es una de las estrategias más simples para el control de robots manipuladores, debido a esto es ampliamente difundida en la rama industrial. Para el diseño del controlador se utiliza la ley de control obtenida en la ecuación (1.45) implementada con 2 bloques PD, uno para cada articulación, ver Anexo 7, los parámetros  $K_p$  y  $K_v$  se seleccionan a través del segundo Método de Ziegler-Nichols para respuesta oscilatoria, primero se varía la ganancia proporcional  $K_p > 0$  y  $K_v = 0$  hasta lograr que el sistema comience a oscilar, ver la Figura 2.12, luego se establece  $K_p = 50$ , aproximadamente a la mitad del valor límite que fue 85 y se comienza a variar  $K_v$  para valores positivos menores que 0.8, debido a que para este valor de  $K_v$  el sistema se vuelve inestable, por lo que se establece un rango donde el sistema es estable:  $0 < K_p \leq 85$  y  $0 < K_v \leq 0.8$ .

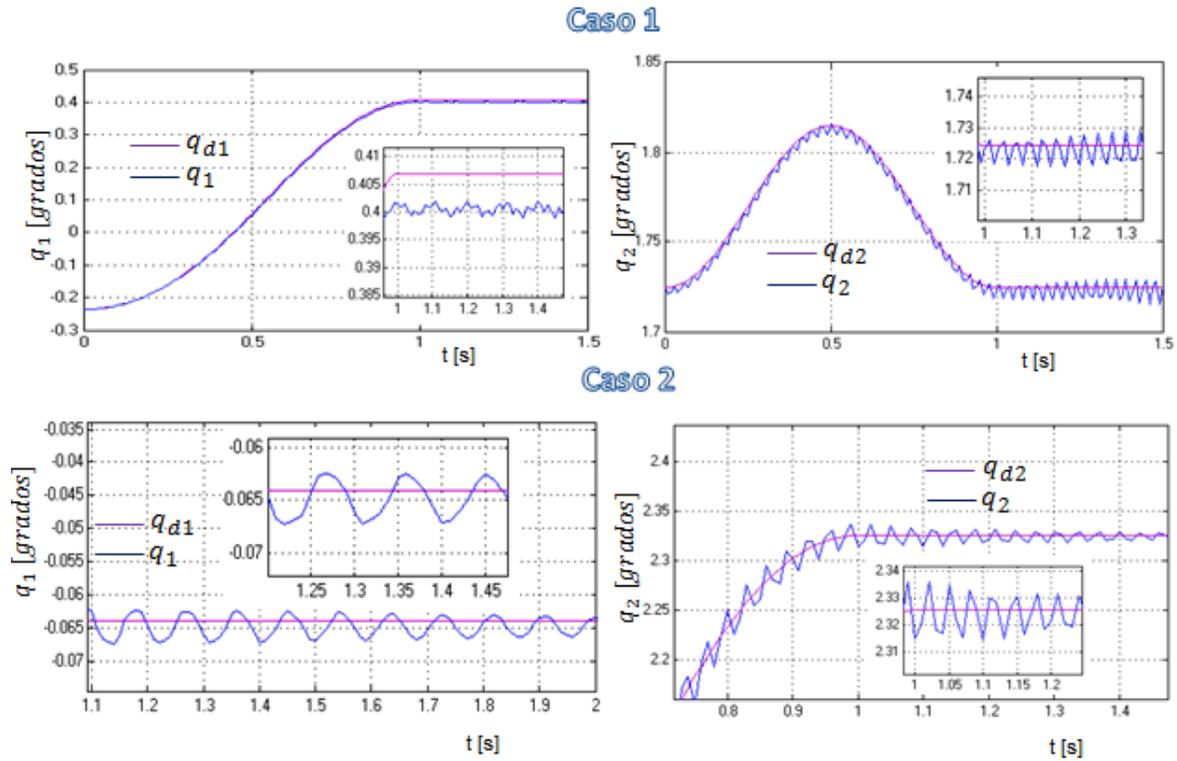


Figura 2.12. Salidas articulares de los 2 casos con control PD, donde se alcanza el régimen oscilatorio ( $Kp = 85$ ,  $Kv = 0$ ).

En la Figura 2.13 se muestra el mejor ajuste obtenido con los parámetros  $Kp = 50$  y  $Kv = 0.5$  para los dos casos de trayectorias, se puede apreciar que cada articulación sigue la trayectoria deseada pero presenta error de seguimiento y un pequeño error a estado estacionario ( $ess$ ), para el caso 1:  $ess_1 = 120 \times 10^{-4}$  y  $ess_2 = 27 \times 10^{-4}$ , para el caso 2:  $ess_1 = 13 \times 10^{-4}$  y  $ess_2 = 28 \times 10^{-4}$ . El tiempo de establecimiento  $t_s = 1.1s$  para ambos casos.

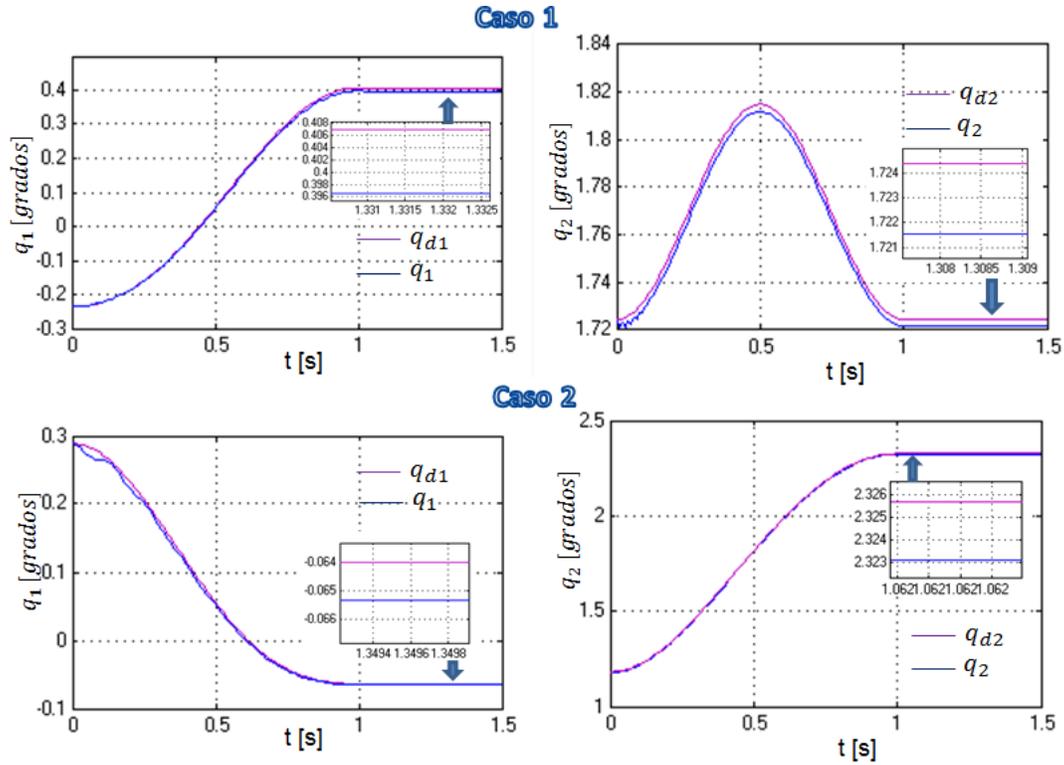


Figura 2.13. Salidas de posición articular para seguimiento de trayectoria lineal en control PD.

En la Figura 2.14 se muestra la salida del sistema en coordenadas cartesianas para los dos casos.

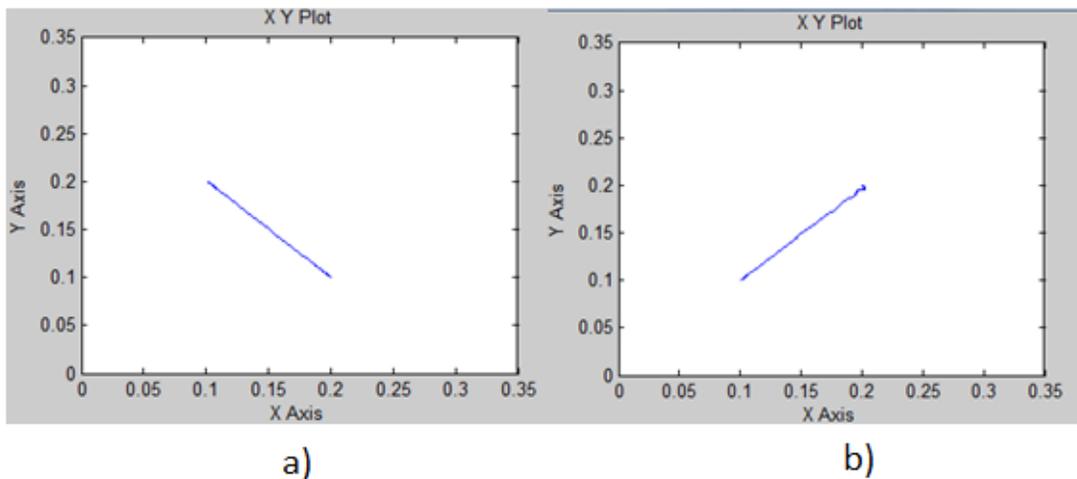


Figura 2.14. Salida del sistema de control PD en coordenadas cartesianas: a) salida caso 1, b) salida caso 2.

Los esfuerzos de control se muestran en la Figura 2.15.

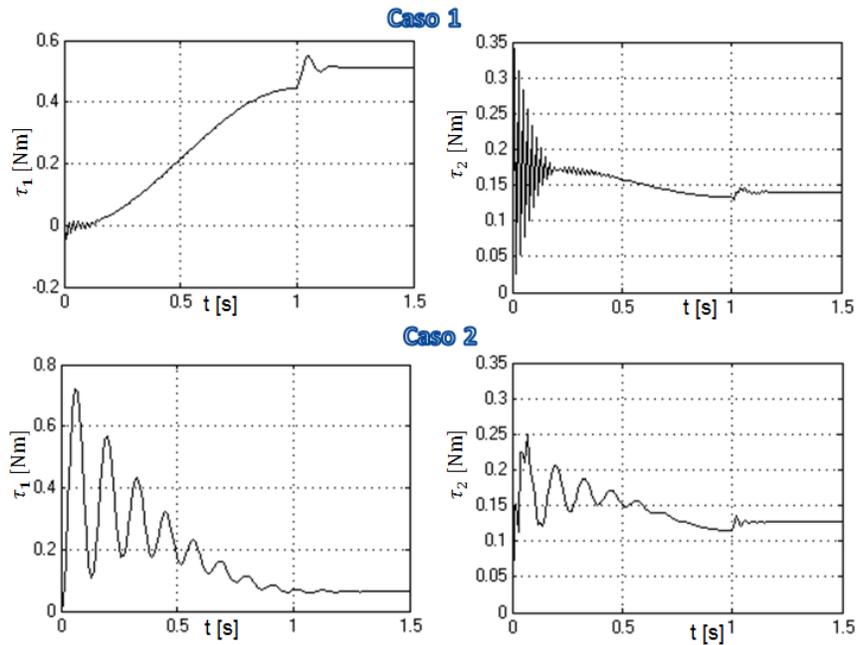


Figura 2.15. Esfuerzos del control PD aplicado a las articulaciones de los dos casos.

*Seguimiento de Señales Seno.*

En la estrategia de control PD, además de realizar el seguimiento de una línea recta se realiza el seguimiento de una señal senoidal por cada articulación, el esquema en bloques utilizado se muestra en la Figura 2.16.

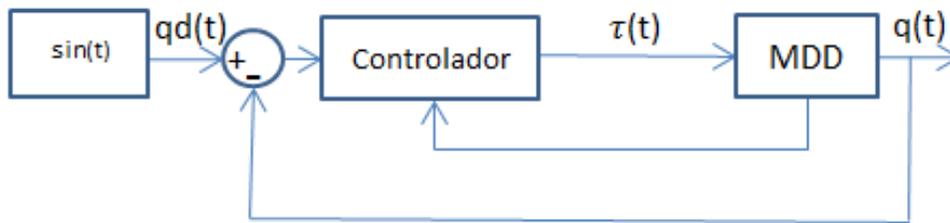


Figura 2.16. Diagrama en bloques general para el seguimiento de señal tipo seno.

Los resultados del seguimiento de las señales sinusoidales de referencia por las articulaciones 1 y 2 se muestran en la Figura 2.17, se puede apreciar que cada articulación sigue la trayectoria deseada pero presenta un pequeño error de seguimiento, para ambas articulaciones el error mínimo es igual a  $16 \times 10^{-3}$ .

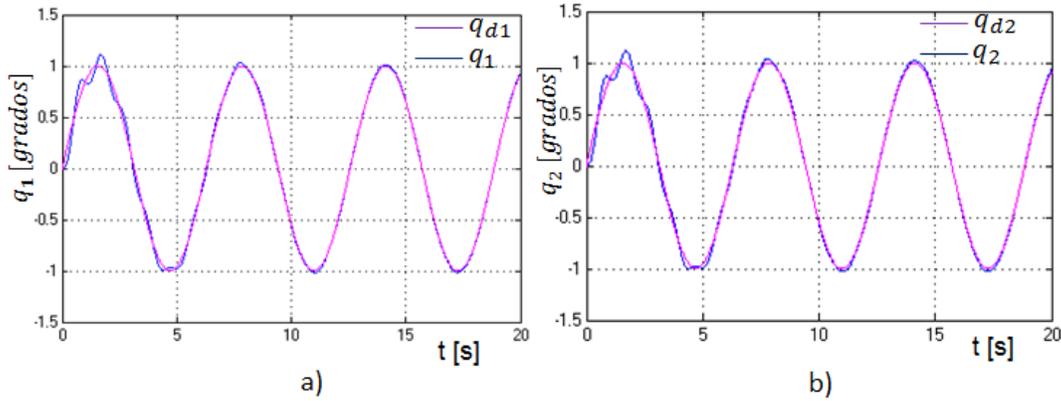


Figura 2.17. Salidas de la posición articular del control PD para el seguimiento de la señal seno: a) articulación 1, b) articulación 2.

La Figura 2.18 muestra los esfuerzos de control de la estrategia PD para cada articulación.

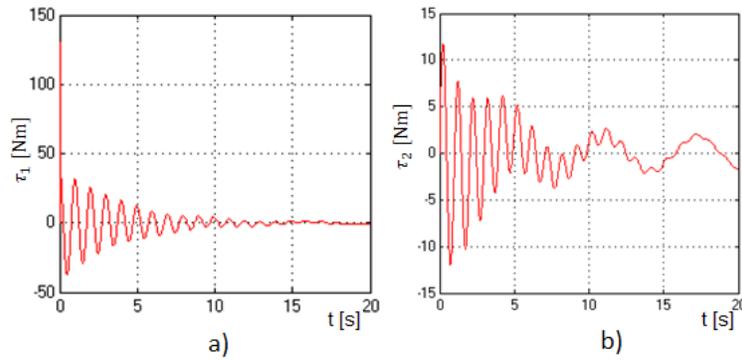


Figura 2.18. Esfuerzos de la estrategia de control PD para el seguimiento de señales tipo seno: a) esfuerzo articulación 1, b) esfuerzo articulación 2.

### 2.1.5.2 Estrategia Control Par Calculado

La ecuación (1.46) enuncia la ley de control del CTC, esta ecuación puede escribirse para cada articulación de la forma:

$$\tau_1 = M_a[\ddot{q}_{d1} + K_p\tilde{q}_1 + K_v\dot{\tilde{q}}_1] + C_a + g_1; \quad (2.7)$$

$$\tau_2 = M_b[\ddot{q}_{d2} + K_p\tilde{q}_2 + K_v\dot{\tilde{q}}_2] + C_b + g_2; \quad (2.8)$$

donde:

$$M_a = M_{11} + M_{12}; \quad (2.9)$$

$$M_b = M_{21} + M_{22}; \quad (2.10)$$

$$C_a = C_{11} + C_{12}; \quad (2.11)$$

$$C_b = C_{21}; \quad (2.12)$$

Para el cálculo de las ecuaciones (2.7) y (2.8) se utilizan las componentes dinámicas evaluadas en los parámetros de la Tabla 2.1.

El bloque CTC se muestra en la Figura 2.19, el código interno del bloque se muestra en el Anexo 8.

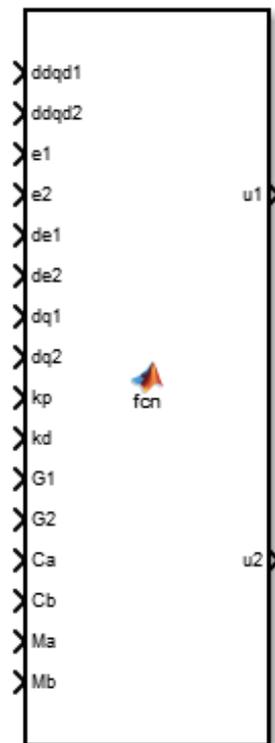


Figura 2.19. Bloque CTC.

El bloque CTC tiene como señales de entrada según en el orden en que se muestran: la segunda derivada de la posición articular 1 ( $\ddot{q}_{d1}$ ), la segunda derivada de la posición articular 2 ( $\ddot{q}_{d2}$ ), el error de posición articular de la articulación 1 ( $\tilde{q}_1$ ), el error de posición articular de la articulación 2 ( $\tilde{q}_2$ ), la derivada del error de posición articular de la articulación 1 ( $\dot{\tilde{q}}_1$ ), la derivada del error de posición articular de la articulación 2 ( $\dot{\tilde{q}}_2$ ), la derivada de la posición articular 1 ( $\dot{q}_1$ ), la derivada de la posición articular 2 ( $\dot{q}_2$ ), la ganancia proporcional  $Kp$ , la ganancia derivativa  $Kv$ , el vector gravitacional de la articulación 1 ( $g_1$ ), el vector gravitacional de la articulación 2 ( $g_2$ ), los vectores  $C_a$ ,  $C_b$ ,  $M_a$  y  $M_b$  anteriormente definidos. Como salida tiene las señales de control  $u1$  equivalente al torque 1 ( $\tau_1$ ) y  $u2$  equivalente

al torque 1 ( $\tau_2$ ). El esquema general del sistema de control se muestra en el Anexo 9.

Los parámetros  $Kp$  y  $Kv$  se establecen a través de la simulación de forma análoga a la del control PD, lográndose la respuesta oscilatoria para  $Kp = 1000$ , ver Figura 2.20, el sistema es estable:  $0 < Kp \leq 1000$  y  $0 < Kv \leq 100$ .

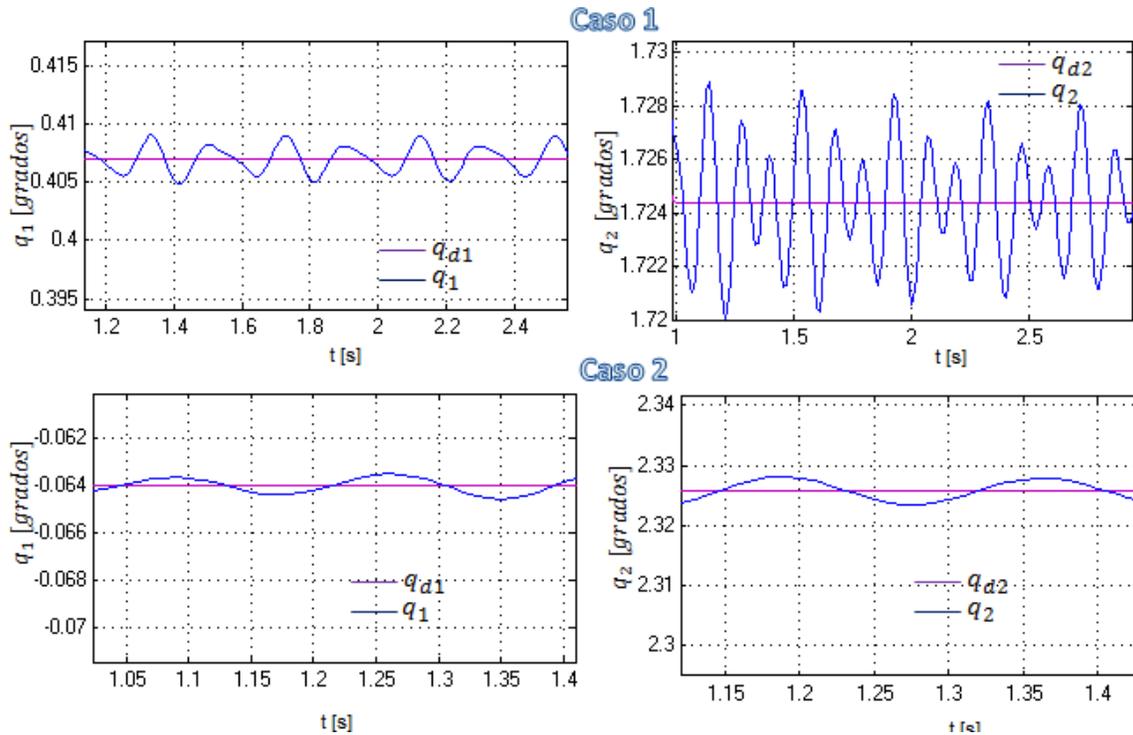


Figura 2.20. Salidas articulares de los 2 casos con CTC, donde se alcanza el régimen oscilatorio ( $Kp = 1000$ ,  $Kv = 0$ ).

Se realiza la selección de  $Kp = 500$  y  $Kv = 40$  debido a que con estos parámetros el sistema muestra el mejor desempeño en cuanto a tiempo de establecimiento y error a estado estacionario dentro del rango de estabilidad, ver Figura 2.21, donde se puede apreciar que cada articulación sigue la trayectoria deseada pero presenta pequeños errores de seguimiento y a estado estacionario, para el caso 1:  $ess_1=1 \times 10^{-4}$  y  $ess_2=2 \times 10^{-4}$ , para el caso 2:  $ess_1=6 \times 10^{-4}$  y  $ess_2=4.5 \times 10^{-4}$ . El tiempo de establecimiento  $t_s=1.2s$  para ambos casos.

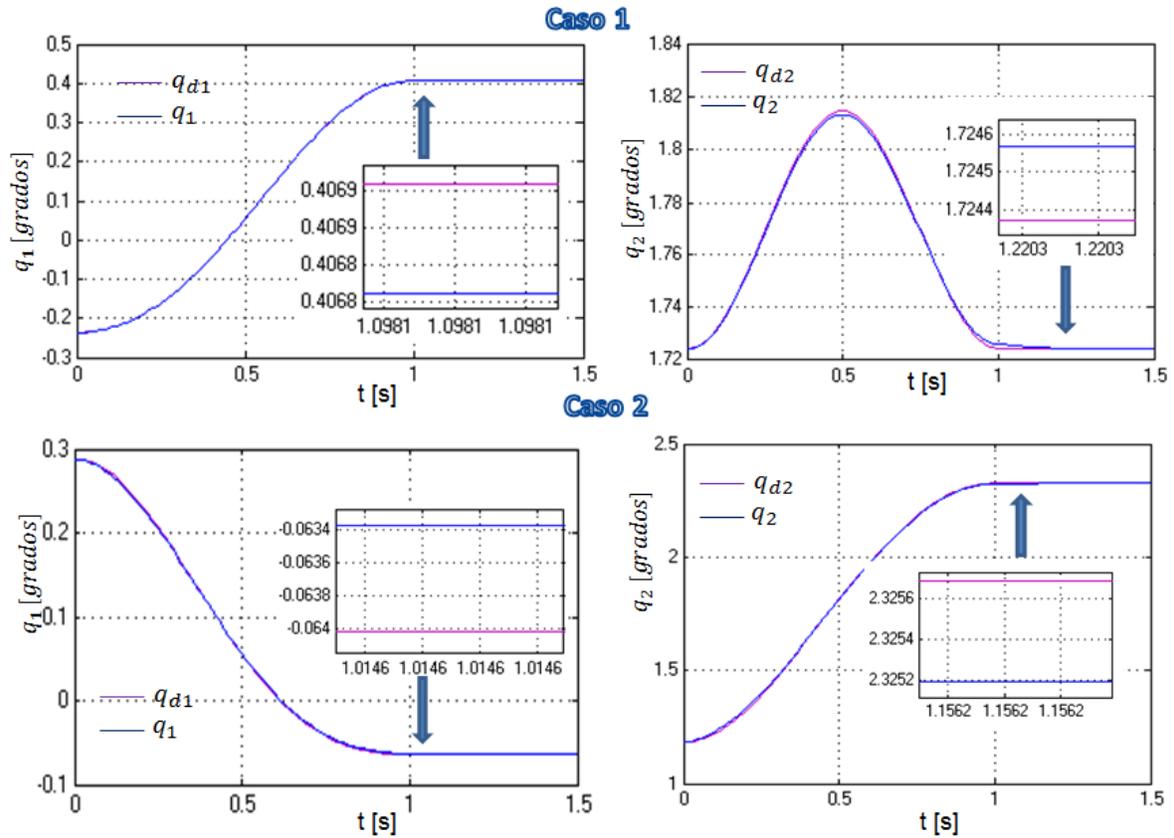


Figura 2.21. Salidas de posición articular para seguimiento de trayectoria por el CTC.

En la figura 2.22 se muestran las salidas del sistema en coordenadas cartesianas para los dos casos.

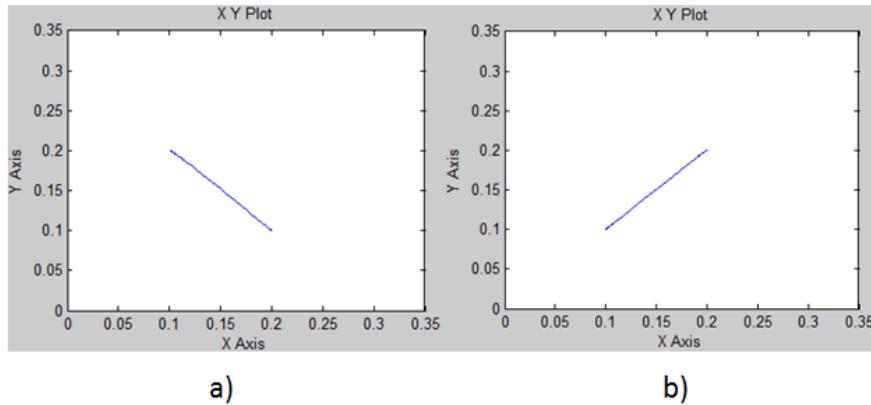


Figura 2.22. Salidas del sistema de control con CTC en coordenadas cartesianas: a) salida caso 1, b) salida caso 2.

Los esfuerzos de control se muestran en la Figura 2.23.

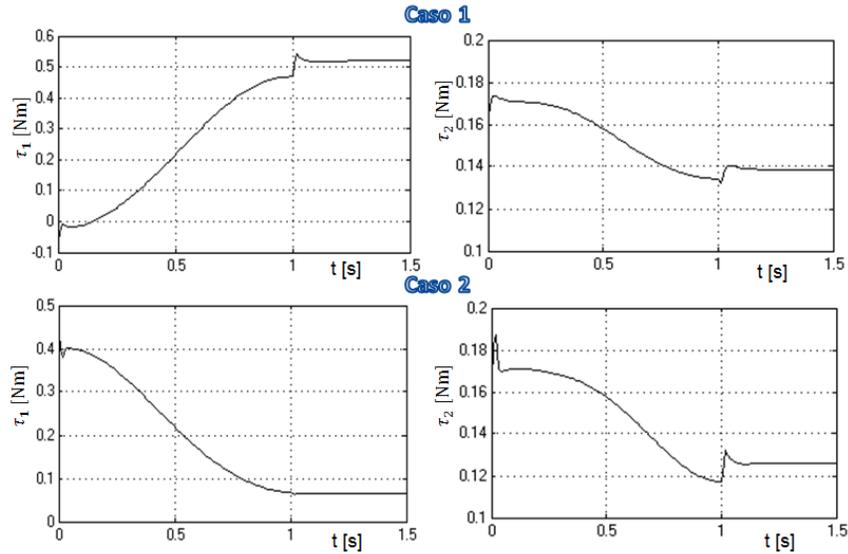


Figura 2.23. Esfuerzos de control CTC aplicado a las articulaciones de los dos casos.

### 2.1.5.3 Estrategia de control por Modo Deslizante.

La ecuación (1.60) enuncia la ley de control del CMD para un robot manipulador de  $n$  GDL, esta ecuación para 2 GDL puede escribirse para cada articulación de la forma:

$$\tau_1 = M_{11}R_1 + M_{12}R_2; \quad (2.13)$$

$$\tau_2 = M_{21}R_1 + M_{22}R_2; \quad (2.14)$$

donde:

$$R_1 = ((\ddot{q}_{d1} + C_a \tilde{q}_1 + K_1 \text{sat}(S_1)) + N_{11}C_{11}\dot{q}_1 + N_{11}g_1 + N_{11}C_{12}\dot{q}_2 + N_{12}g_2 + N_{12}C_{21}\dot{q}_1); \quad (2.15)$$

$$R_2 = ((\ddot{q}_{d2} + C_b \tilde{q}_2 + K_2 \text{sat}(S_2)) + N_{21}C_{11}\dot{q}_1 + N_{21}g_1 + N_{21}C_{12}\dot{q}_2 + N_{22}g_2 + N_{22}C_{21}\dot{q}_1); \quad (2.16)$$

con:

$$S_1 = \dot{q}_1 + C_a \tilde{q}_1; \quad (2.16)$$

$$S_2 = \dot{q}_2 + C_b \tilde{q}_2; \quad (2.17)$$

$K_1$  y  $K_2$  son ganancias positivas.

La Figura 2.24 muestra el bloque del controlador CMD, para su diseño fue necesaria la utilización de las ecuaciones antes definidas. El esquema interno del bloque se muestra en el Anexo 10.

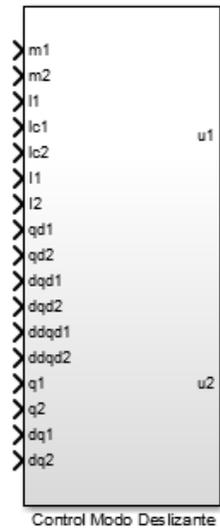


Figura 2.24. Bloque CMD.

Los valores de  $K_1$  y  $K_2$  se escogieron mediante la simulación, el mejor ajuste se obtuvo para  $K_1 = K_2 = 50$ , en la Figura 2.25 se muestran las respuestas para tres valores de  $K_1$  y en la Figura 2.26 se muestran las respuestas para tres valores de  $K_2$  ambas para el seguimiento de la trayectoria del caso 1.

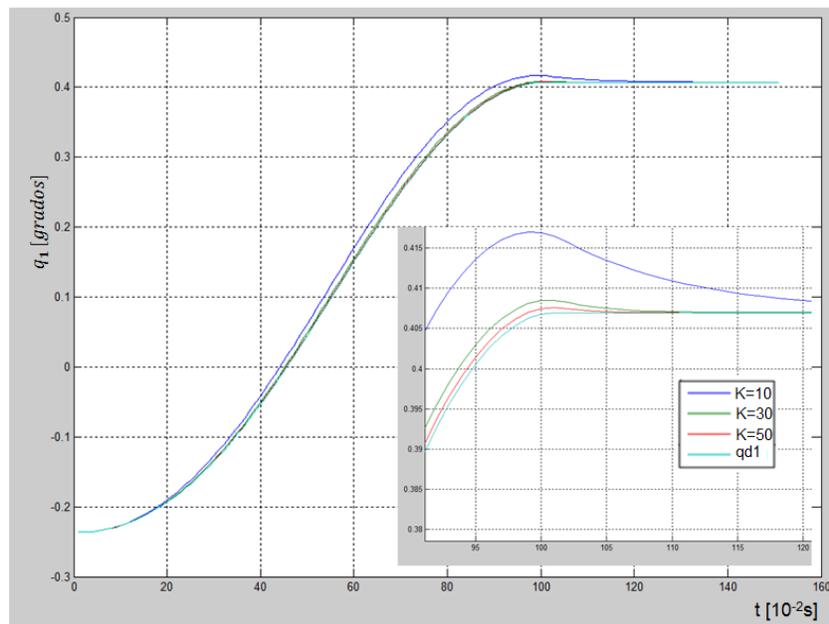


Figura 2.25. Salida de la posición articular 1 ante tres valores de  $K_1$ .

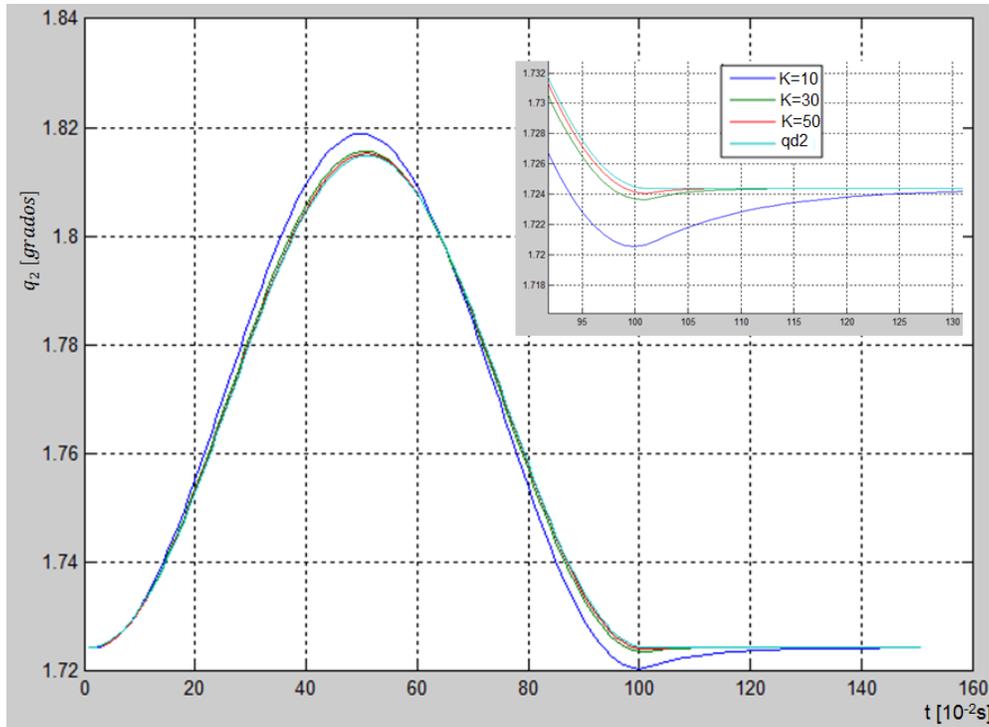


Figura 2.26. Salida de la posición articular 2 ante tres valores de  $K_2$ .

Las ecuaciones (2.15) y (2.16) utilizan la función saturación con valores entre 0.1 y -0.1, esto asegura la eliminación de cualquier efecto del chattering que pueda aparecer. Las superficies deslizantes  $S_1$  y  $S_2$  tienden a 0 luego que cada articulación alcanza el estado estacionario a los 1.12 s como se muestra en la Figura 2.27.

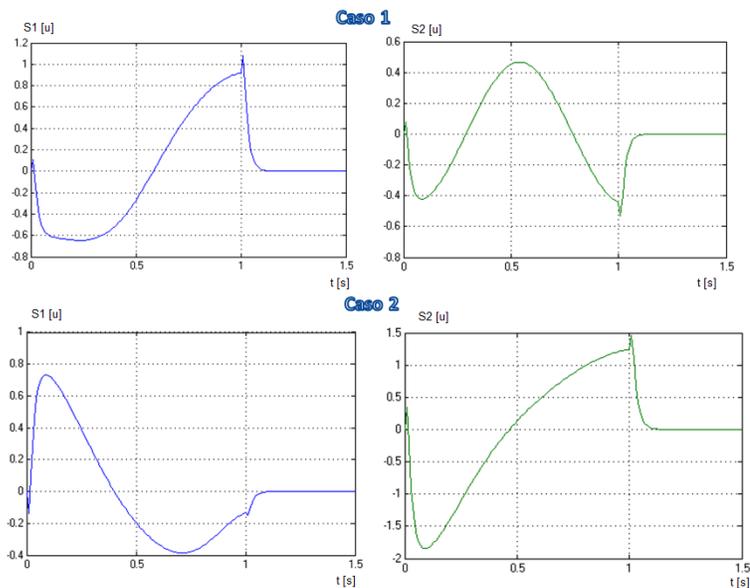


Figura 2.27. Superficies deslizantes para los dos casos.

## Capítulo II

En la Figura 2.28 se muestran los resultados de sistema de control con CMD, en donde se puede apreciar que cada articulación sigue la trayectoria deseada y se reducen los errores de seguimiento y a estado estacionario comparado con las dos estrategias diseñadas anteriormente, para el caso 1:  $ess_1=1.14 \times 10^{-5}$  y  $ess_2=2.13 \times 10^{-7}$ , para el caso 2:  $ess_1=9.31 \times 10^{-6}$  y  $ess_2 = 2.26 \times 10^{-5}$ . El tiempo de establecimiento  $t_s=1.12s$  para ambos casos.

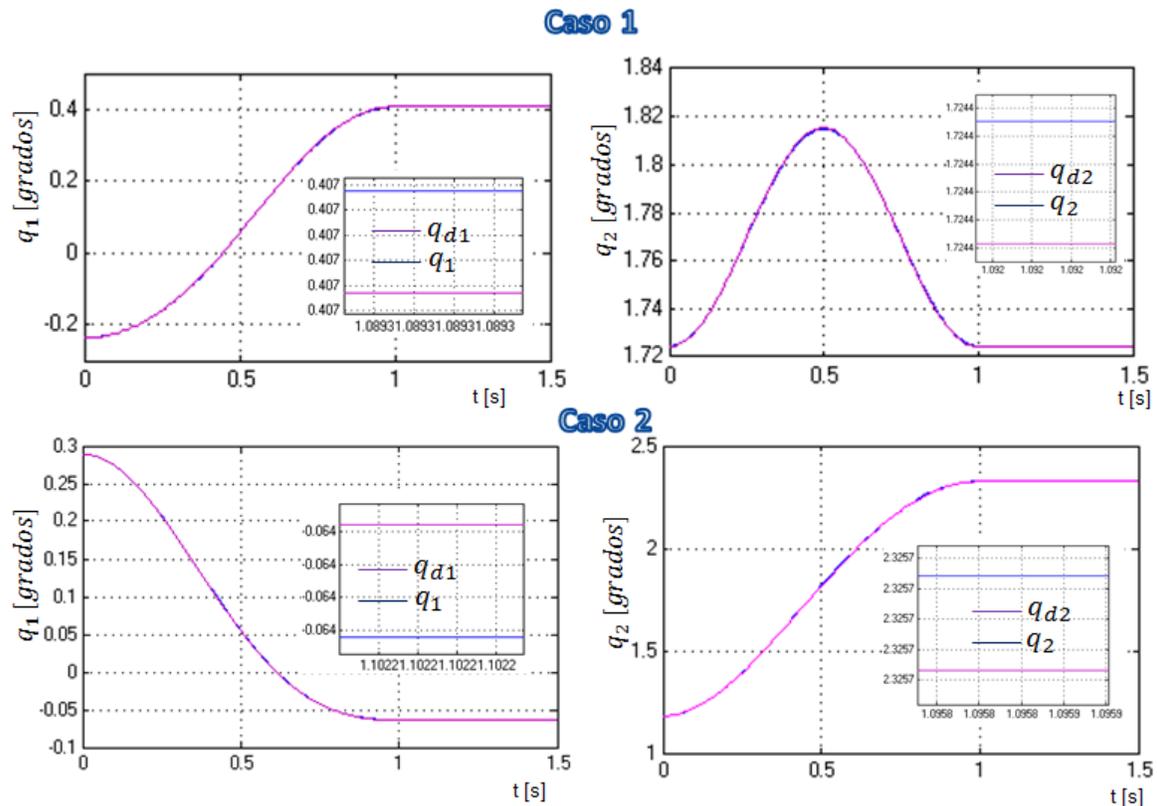


Figura 2.28. Salidas de posición articular para el seguimiento de trayectoria por el CMD.

En la Figura 2.29 se muestran las salidas del sistema en coordenadas cartesianas para los dos casos.

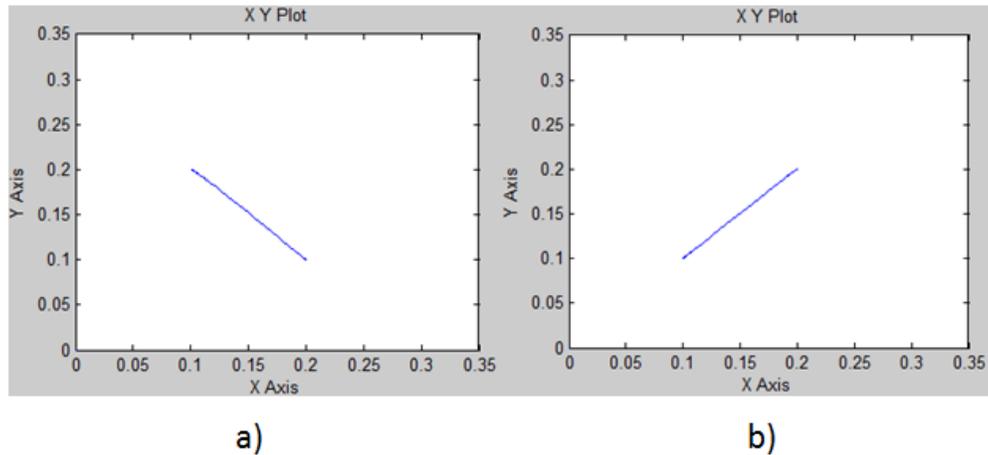


Figura 2.29. Salidas del sistema de control con CMD en coordenadas cartesianas: a) salida caso 1, b) salida caso 2.

Los esfuerzos de control para lograr el desempeño de la estrategia CMD se muestran en la Figura 2.30.

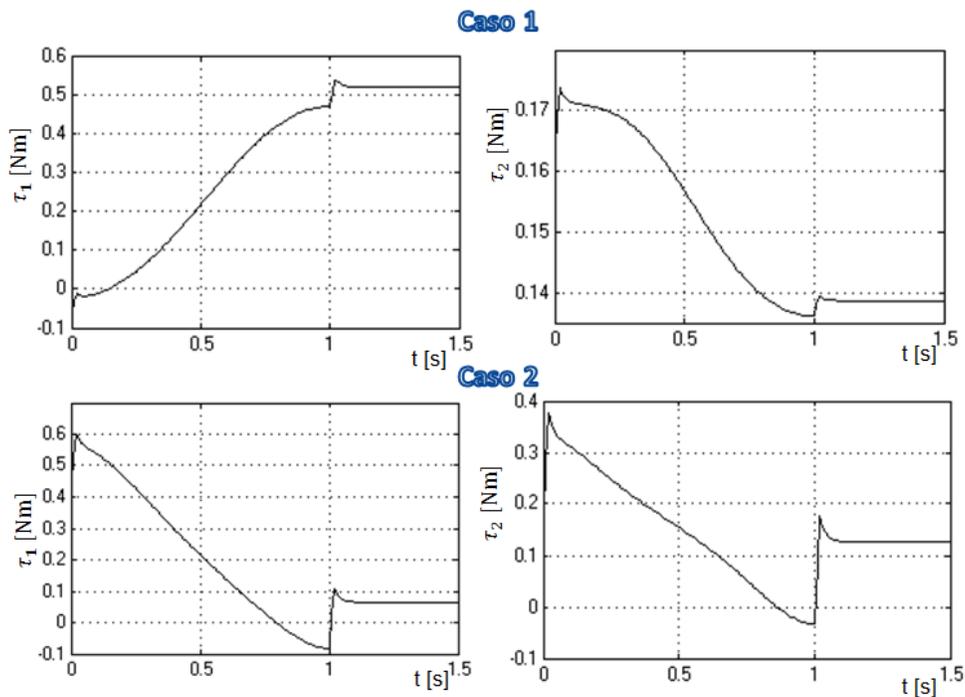


Figura 2.30. Esfuerzos de control CMD aplicado a las articulaciones de los dos casos.

### Seguimiento de Señales Seno.

El resultado del seguimiento de las señales sinusoidales de referencia por las articulaciones 1 y 2 del CMD se muestran en la Figura 2.31, donde se aprecia que

la estrategia disminuye el error mínimo de seguimiento antes alcanzado por el control PD a  $14.1 \times 10^{-3}$  para la articulación 1 y  $9.4 \times 10^{-3}$  para la articulación 2.

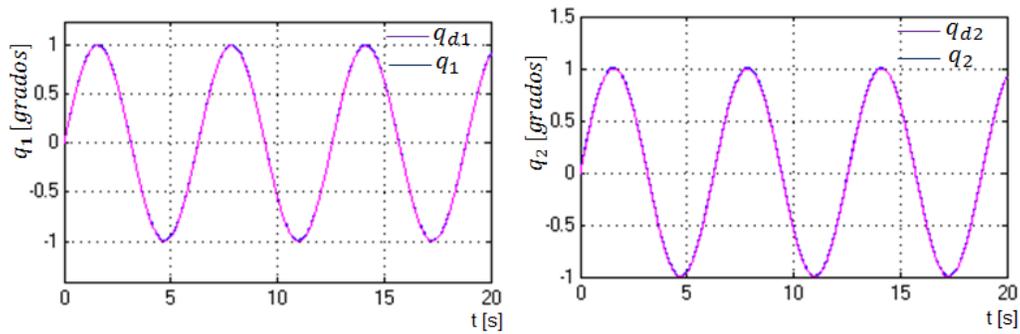


Figura 2.31. Seguimiento señal seno por el CMD.

La Figura 2.32 muestra los esfuerzos de control de la estrategia CMD para cada articulación.

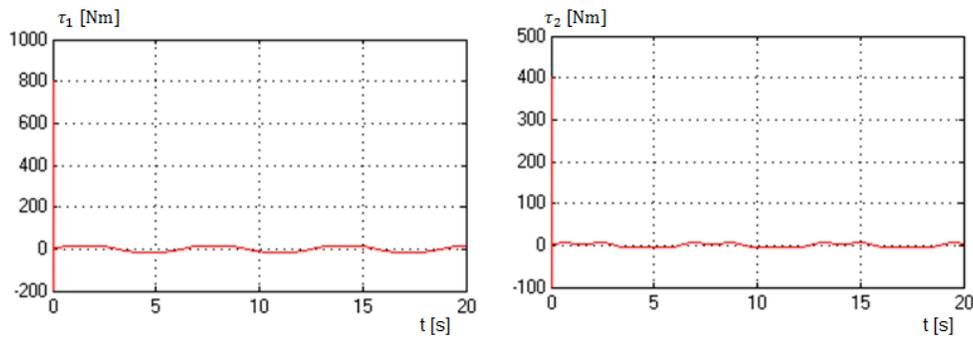


Figura 2.32 Esfuerzos de la estrategia CMD para el seguimiento de señales tipo seno: a) esfuerzo articulación 1, b) esfuerzo articulación 2.

En la Figura 2.33 se muestran los desempeños alcanzados por cada estrategia.

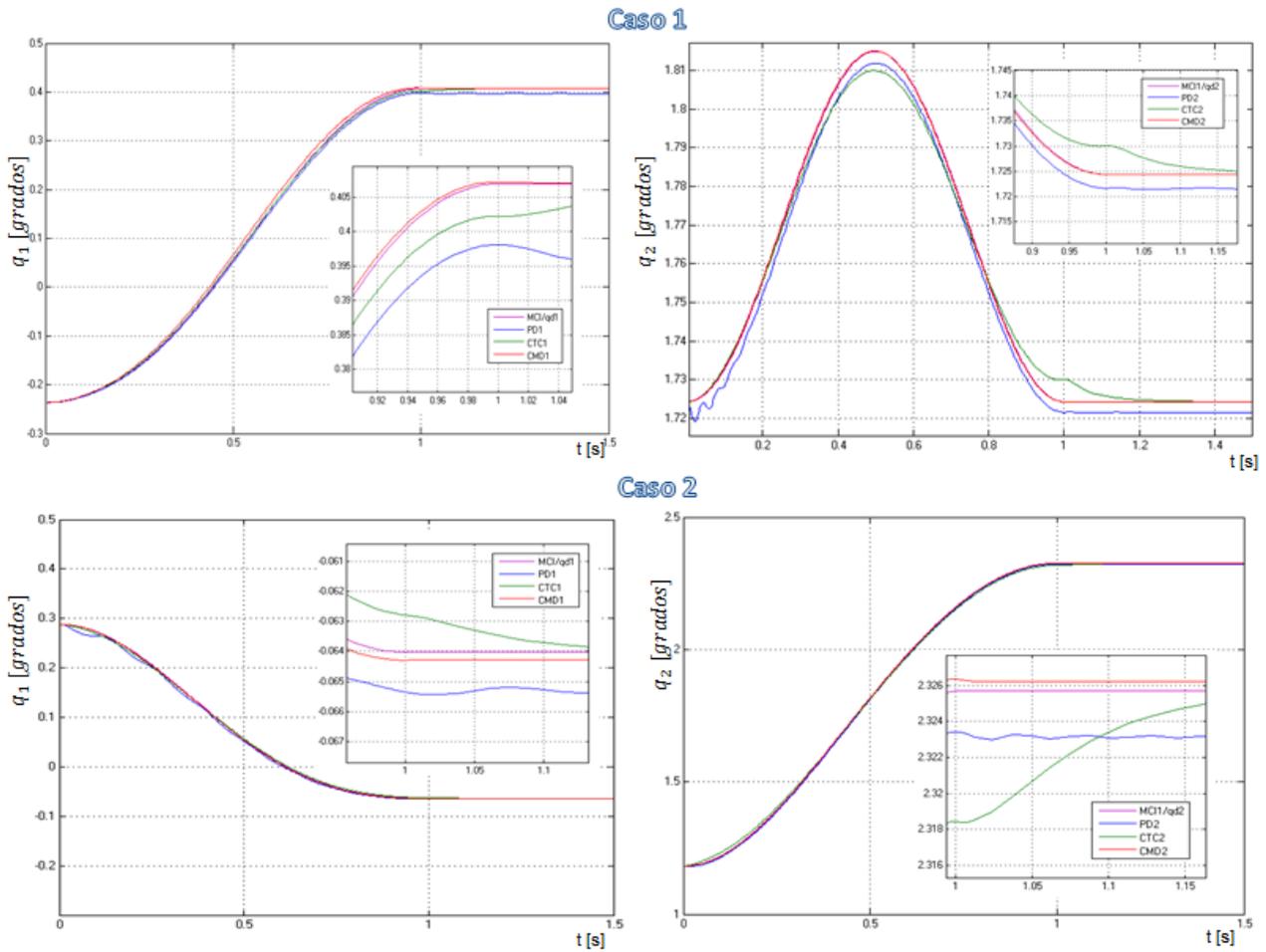


Figura 2.33. Desempeños alcanzados por las tres estrategias de control para los dos casos de trayectoria de referencia en línea recta.

## 2.2 Incertidumbres Paramétricas del Modelo dinámico.

Luego de haber diseñado y mostrado el desempeño alcanzado por cada una de las estrategias para el control de posición del extremo del robot siguiendo una línea recta o una señal sinusoidal, se analiza si cada estrategia compensa las incertidumbres o variaciones que pueden ocurrir en los parámetros del modelo dinámico, para esto se varían cuatro parámetros del modelo: la masa de articulación 2 ( $m_2$ ), la longitud de centro de masa de la articulación 2 ( $l_{c2}$ ) y los momentos de inercia de ambas articulaciones ( $I_1$ ) y ( $I_2$ ) de la siguiente forma:

$$m_2(t) = \begin{cases} m_2 + 1 & \begin{cases} 1 \leq t \leq 1.5 \\ 2 \leq t \leq 2.5 \\ 3 \leq t \leq 3.5 \end{cases} \\ m_2 & t \text{ restante} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$l_{c2}(t) = \begin{cases} l_{c2} + 1 & \{5 \leq t \leq 6 \\ l_{c2} & t \text{ restante} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$I_1(t) = \begin{cases} I_1 + 2I_1 & \{7 \leq t \leq 7.5 \\ I_1 & t \text{ restante} \end{cases} \quad (2.21)$$

$$I_2(t) = \begin{cases} I_2 + 2I_2 & \{9 \leq t \leq 9.5 \\ I_2 & t \text{ restante} \end{cases} \quad (2.22)$$

La variación de  $m_2$  puede interpretarse como un cambio brusco de la articulación 2 que es la que está directamente vinculada con el extremo del robot, el cambio en  $l_{c2}$  provoca que se corre el punto de centro de masa de la articulación 2 y los cambios en los momentos de inercia  $I_1$  y  $I_2$  debido a la variación del peso del extremo. En la Figura 2.34 se muestran las variaciones de dichos parámetros.

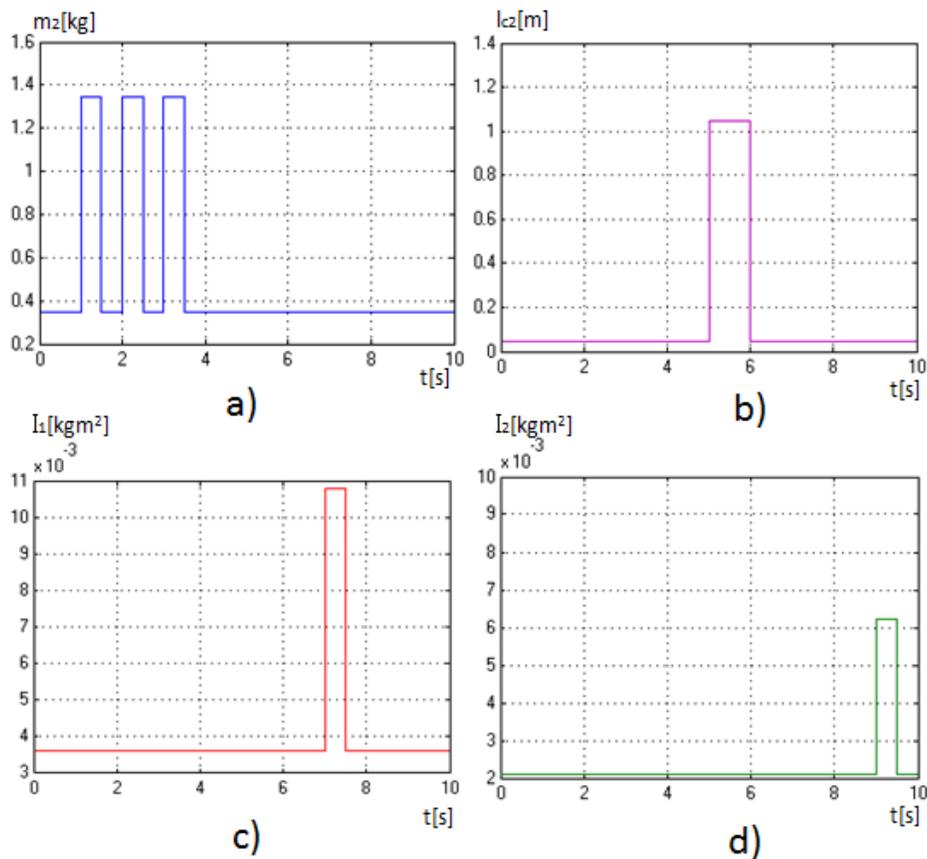


Figura 2.34. Incertidumbres de los parámetros del modelo: a) variación de  $m_2$ , b) variación de  $l_{c2}$ , c) variación de  $I_1$  y d) variación de  $I_2$ .

En la Figura 2.35 se muestra el comportamiento del sistema de control con estrategia PD ante la variación de los parámetros antes mencionados para los dos

casos de trayectoria en línea recta, se aprecia que a la estrategia le afectan las incertidumbres paramétricas pero es capaz de compensarlas.

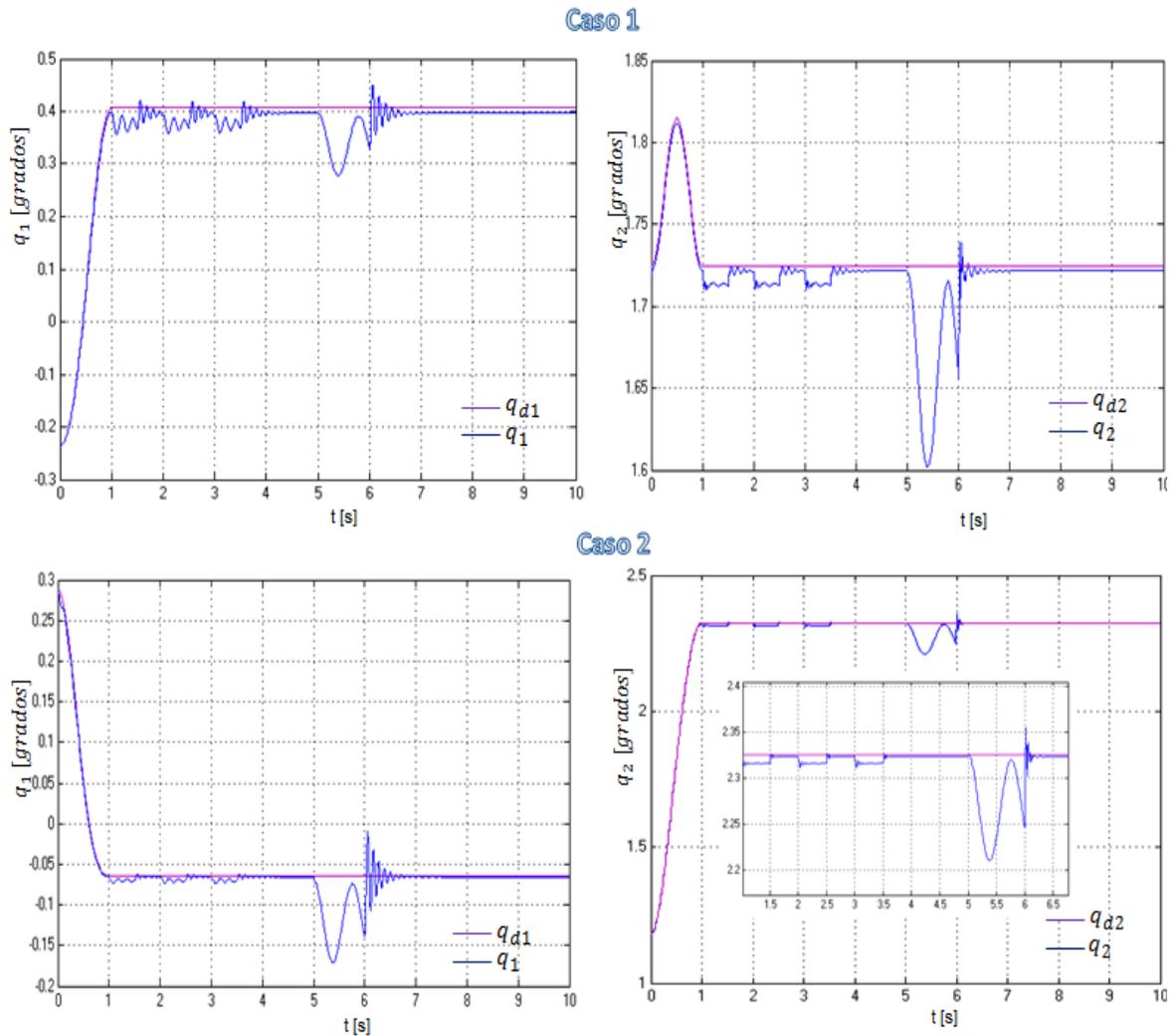
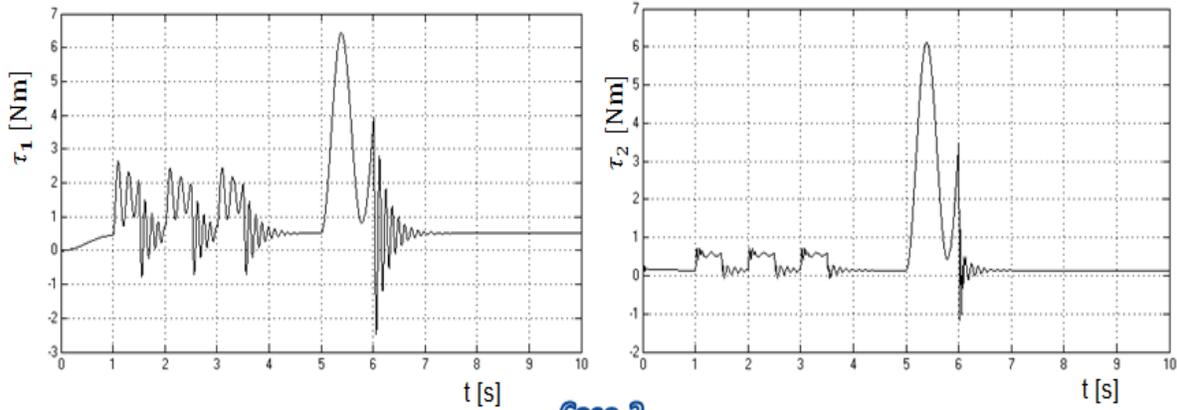


Figura 2.35. Comportamiento de la estrategia PD ante la variación de los parámetros.

La Figura 2.36 muestra los esfuerzos del control PD para compensar las variaciones.

Caso 1



Caso 2

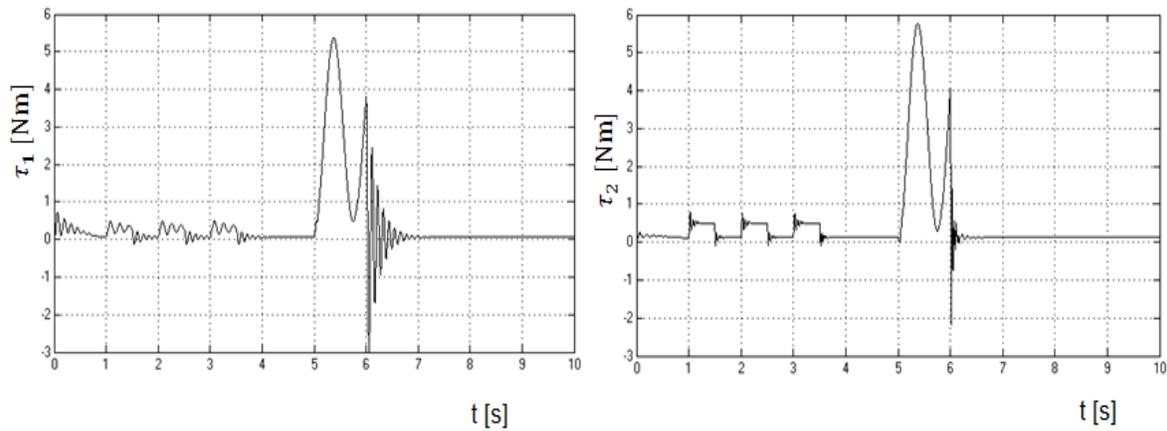


Figura 2.36. Esfuerzos de Control de la estrategia PD ante la variación de los parámetros.

En la Figura 2.37 se muestra el comportamiento del sistema de control con estrategia CTC ante la variación de los parámetros antes mencionados para los dos casos de trayectoria en línea recta, donde se aprecia que a la estrategia le no le afectan ninguna de las variaciones en los parámetros esto se debe a que la ley de control tiene en cuenta los términos dinámicos del modelo.

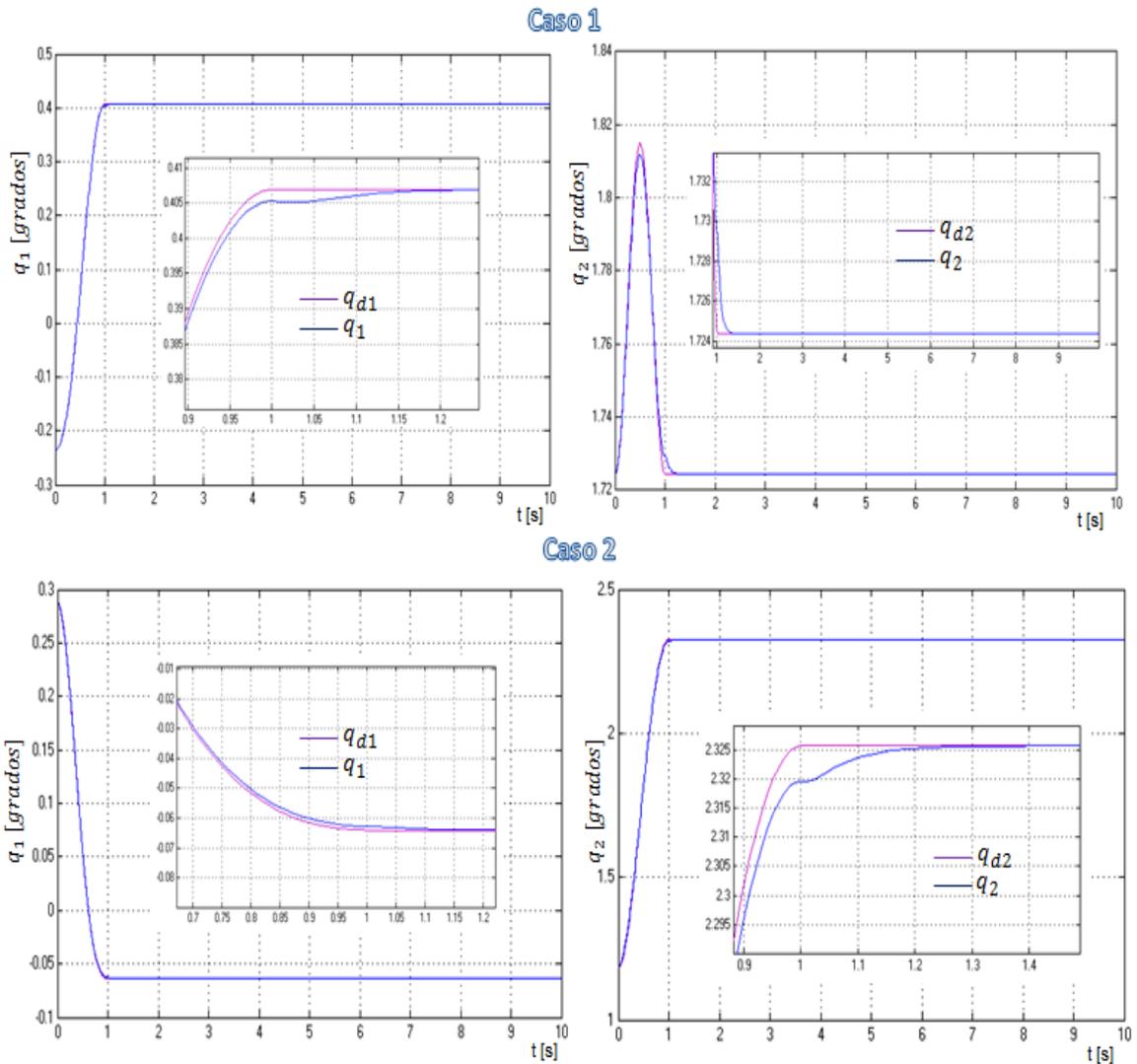
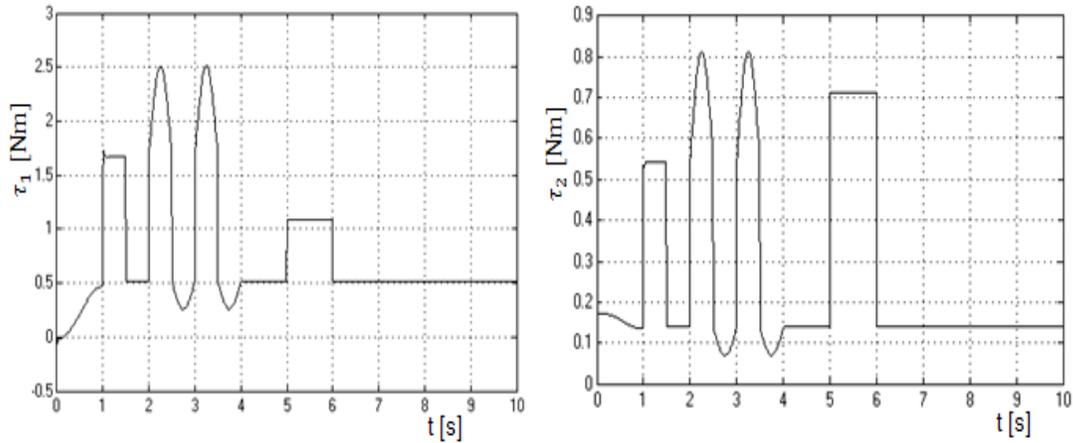


Figura 2.37. Comportamiento de la estrategia CTC ante la variación de los parámetros.

La Figura 2.38 muestra los esfuerzos del control CTC para compensar las variaciones.

Caso 1



Caso 2

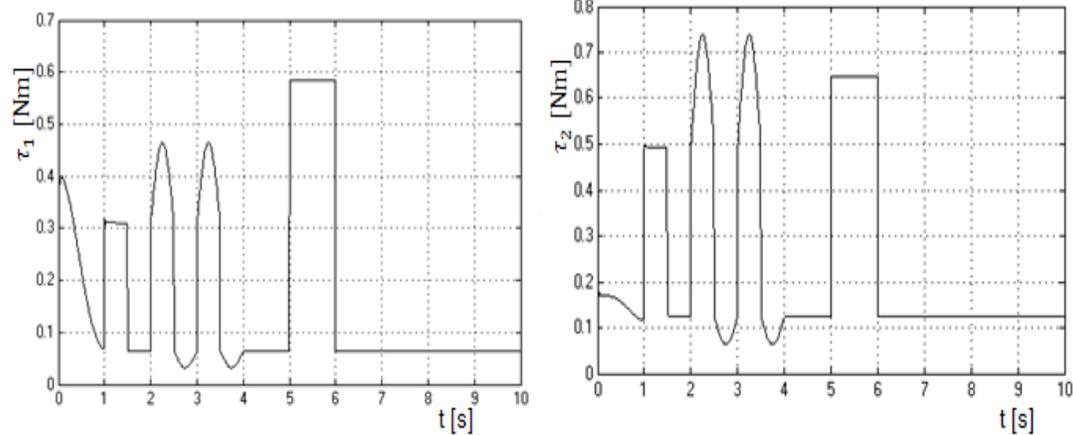
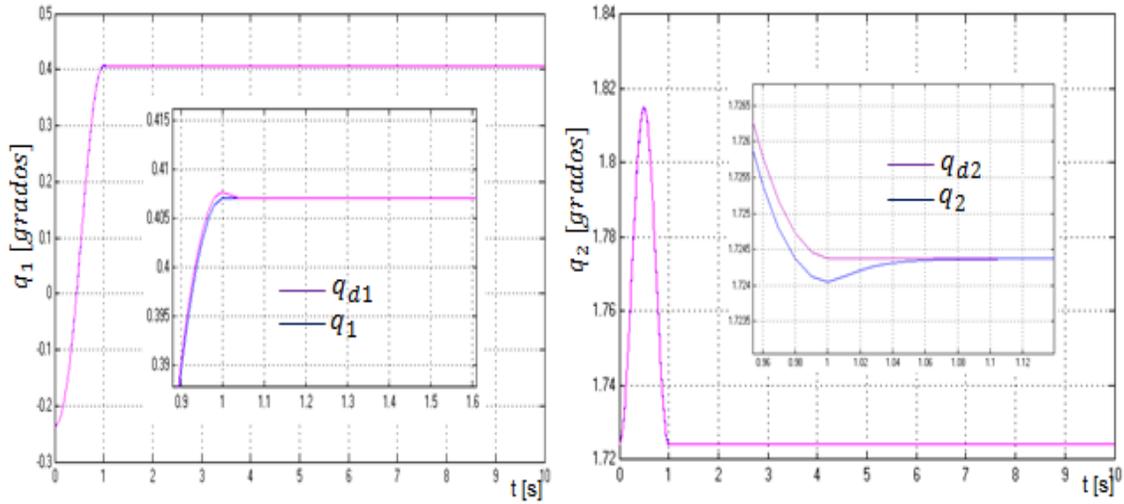


Figura 2.38. Esfuerzos de Control de la estrategia CTC ante la variación de los parámetros.

En la Figura 2.39 se muestra el comportamiento del sistema de control con estrategia CMD ante la variación de los parámetros antes mencionados para los dos casos de trayectoria en línea recta, donde se aprecia que a la estrategia le no le afectan ninguna de las variaciones en los parámetros esto se debe a que la ley de control tiene en cuenta los términos dinámicos del modelo.

Caso 1



Caso 2

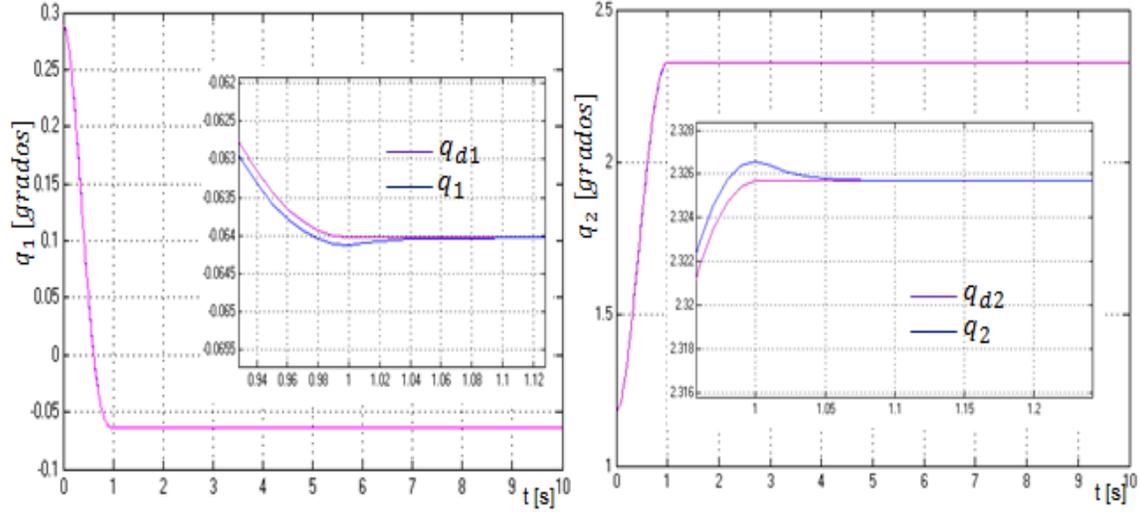


Figura 2.39. Comportamiento de la estrategia CMD ante la variación de los parámetros.

La Figura 2.40 muestra los esfuerzos del control CMD para compensar las variaciones de los parámetros.

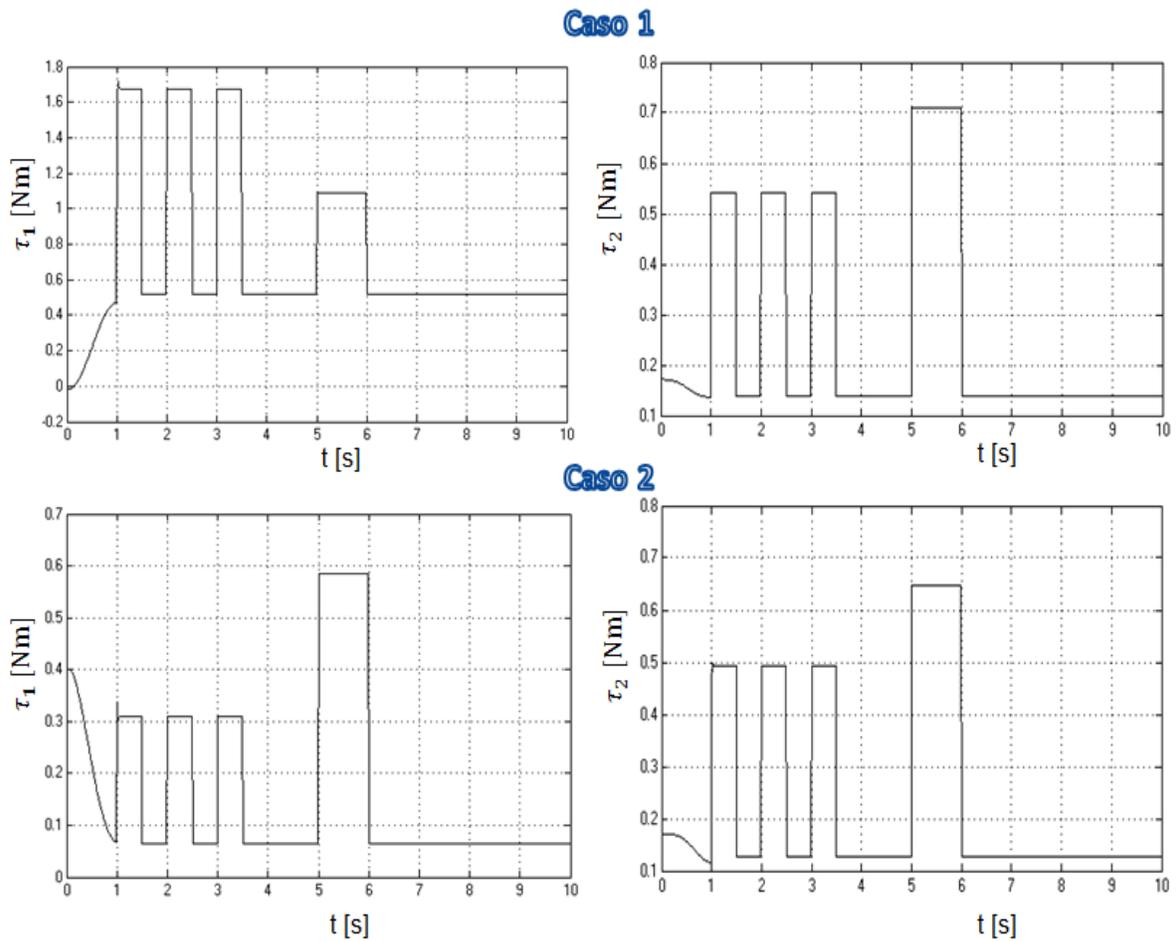


Figura 2.40. Esfuerzos de Control de la estrategia CMD ante la variación de los parámetros.

### 2.3 Análisis de los resultados.

Luego de diseñar y mostrar la respuesta temporal de cada estrategia para el seguimiento de los dos casos de trayectorias en línea recta, el seguimiento de señales sinusoidales y la respuesta del sistema ante variaciones de parámetros del modelo, se puede observar como la estrategia CMD ha mostrado un desempeño superior en cuanto a error de seguimiento, error a estado estacionario, tiempo de establecimiento y compensación de incertidumbres paramétricas. La estrategia CTC aunque no pudo ser utilizada para el seguimiento de las señales sinusoidales debido a que el sistema se hacía inestable para cualquier valor de ajuste de  $K_p$  y  $K_v$ , compensó los efectos de las incertidumbres paramétricas sin desviar al sistema del valor de establecimiento y mostró menor error a estado estacionario comparado con la estrategia PD.

## **Conclusiones del Capítulo II**

1. En este capítulo se presentó el diseño y la simulación de tres alternativas de control utilizadas para el control de posición de un robot articular de 2 GDL siguiendo una línea recta o ante una señal sinusoidal de referencia, evidenciándose las prestaciones de cada una de ellas.
2. Se realizó una comparación de estas estrategias demostrándose que el CMD presenta el comportamiento robusto esperado.

## **CONCLUSIONES GENERALES**

Las conclusiones de esta investigación se muestran a continuación:

1. Se realizó una investigación de los sistemas robóticos, lo que permitió la obtención de modelos matemáticos del robot articular de 2 GDL.
2. Se realizó una caracterización teórica e histórica de las estrategias de control: PD, CTC y CMD, que permitió valorar las prestaciones de cada una y su evolución actual aplicadas al campo de la robótica.
3. Se realizó el diseño y simulación de las funciones para la variación de parámetros del modelo (incertidumbres paramétricas), las que fueron aplicadas al sistema de control, las respuestas obtenidas fueron utilizadas como parte del análisis de robustez de cada estrategia.

## **RECOMENDACIONES**

1. Implementar las estrategias de control diseñadas con valores reales de las funciones de transferencia de los actuadores y sensores de realimentación de una aplicación real.
2. Diseñar otras estrategias de control avanzadas como Control Predictivo y control Fuzzy para aplicarlas al control de posición del robot articular de 2 GDL.

**BIBLIOGRAFÍA**

1. Abdalá, S., y R. Ñeco. «Caracterización de un robot manipulador articulado.» Tesis de Maestría, México, 2003.
2. Acosta, L., y M. Sigut. «Matemática y robótica.» Curso Interuniversitario “Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas”, 2005.
3. Albites, J., M. Rimachi, J. Paucar, y N. Anchayhua. «Diseño y Análisis de Controladores para un robot de 3 GDL con capacidad de dibujo.» 2010.
4. Bachenheimer, C., y A. Martínez. «Control no lineal para un Manipulador Robótico de dos grados de libertad.» Pontificia Universidad Javeriana, Mexico, 2006.
5. Barrientos , A., L.F. Peñin, C. Balaguer, y R. Aracil. *Fundamentos de Robótica*. Madrid: McGraw-Hill, 1997.
6. Checa, D., D. Luna, y V. Mosquera. «Simulador de un Robot SCARA de 4 GDL Basado en Realidad Virtual.» Cuarto Congreso Colombiano de Computación 4CCC Sociedad Colombiana de Computación., Colombia, 2009.
7. Cuevas, L.A., I. Ramírez , y F. Cruz. «Análisis y construcción de un Manipulador de cuatro grados de libertad.» Memorias del XVII Congreso Internacional Anual de la SOMIM 2012, México, 2012.
8. Fu, K.S., R.C. González, y C.S Lee. *Robótica: Control, detección, visión e inteligencia*. Madrid: Mc Graw-Hill, 2005.
9. García Gabín, W., D. Zambrano, y O. Camacho. «Control por modo deslizante para vehículos autónomos con elevado retardo para el seguimiento de caminos rectos.» *Téc. Ing. Univ.Zulia* 28, nº 2 (2005): 134-144.
10. Garelli, F. «Sistemas de Estructura Variable. Aplicación al Control con Restricciones.» Tesis Doctoral, Universidad Nacional de La Plata, La Plata, 2007.
11. González Vázquez, S. «Diseño de controladores robustos y adaptativos para robot manipuladores.» Tesis de Maestría, Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital, Tijuana, 2005.

## Bibliografía

12. Gutierrez, J. H. «Diseño de un sistema de control supervisor híbrido.» Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería Eléctrica-UTP, Pereira, 2009.
13. Ismet Can, Mehmet. «Virtual prototyping for robot controllers.» The 13th International Conference on Machine Design and Production, Istanbul, Turkey, 2008.
14. Jabonero, J. «Modelado y análisis de un brazo mecánico.» Leganes, 2010.
15. Kelly, R., V. Santibáñez, y A. Loría. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. ISBN-10:1852339942 vols. Alemania: Springer, 2005.
16. Kern, J. «Modelamiento y simulación de un robot redundantes de tipo SCARA.» *Lat. Am. J. Phys. Educ*, 2011.
17. Kozlowski, K. *Robot Motion and Control*. Polonia: Springer, 2006.
18. Lewis, F. *Robot Manipulator Control Theory and Practice*. New York: Marcel Dekker Inc., 2004.
19. Lorandi Medina, Pedro Alberto, y et al. «Controladores PID y Controladores Difusos.» *Revista de la Ingeniería Industrial* 5, nº 1 (2011).
20. Madrid, E., J. Tafur, S. Robles, y J. Curay. «Diseño y fabricación de un brazo robot de cinco grados de libertad articulado verticalmente: control y potencia.» 8º Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica., Perú, 2007.
21. Maldonado del Toro, H.M., y R. Silva Ortigoza. «Modelado y simulación de un robot rígido de dos grados de libertad.» *Lat. Am. J. Phys. Educ.* 5, nº 1 (2011): 321-327.
22. MATLAB, R2012a. *MATLAB Help*. 2012.
23. Merchán Cruz, E. A. «Metodología para generación de trayectorias de manipuladores robóticos, su cinemática y dinámica.» Tesis de Maestría, Mexico D.F., 2000.
24. Morales, C. «Simulación y Validación Experimental de un Control No Lineal aplicado a un efector reduciendo algunos movimientos de la mano.» Tesis de Maestría, México, 2008.
25. Muñoz, E., V. H. Mosquera, C. A. Gaviria, y O. A. Vivas . «. Evaluación del desempeño de diversos controladores avanzados aplicados a un robot manipulador tipo SCARA.» *Ingeniería & Desarrollo*, 2011.

## Bibliografía

26. Nise, N. S. *Control Systems Engineering (Sixth Edition)*. California: Wiley , 2011.
27. Ogata, Katsuhiko. *Modern Control Engineering*. 4th. México: Prentice - Hall, 2002.
28. Ortega, P. «Control en modo de deslizamiento con redes neuronales de un robot manipulador movido por motor de DC.» Proyecto de curso, México, 2006.
29. Pedroni, J.P., W. Cova, y L. Mathé. «Aplicaciones de modo deslizantes para el control de movimientos de un robot laparoscópico experimental.» *Revista FCEfyN 2*, nº 1 (Marzo 2015): 26-32.
30. Romero, R., J. Stojanov, A.S.I Zinober, y F.R. Rubio. «Diferenciación mediante control por modos deslizantes.» Escuela Superior de Ingnieros de Sevilla, Sevilla, 2004.
31. Roque, R. «Estudio de los sistemas de control por modo deslizantes y sus aplicaciones.» Facultad de Ingeniería, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, 2003.
32. Sebastian, E., y M.A. Sotelo. «Control en modo deslizante adaptativo borroso de las variables cinemáticas del vehículo subacuático Snorkel.» *RIAI 4*, nº 1 (2007): 58-69.
33. Sorcia, F.J., C.D. García, J. Reyes, y A. Rodríguez. «Control de un brazo robot de eslabón flexible mediante PID Generalizado y Control Sin Modelo.» Congreso Anual 2010 de la Asociación de México de Control Automático. Puerto Vallarta, Jalisco, México, Jalisco, 2010.
34. Torres, S., y J.A. Méndez. «Seguimiento de Trayectorias en Robots Manipuladores: Revisión de Soluciones y Nuevas Propuestas.» *RIAI*, 2009: 80-92.
35. Valencia, G. «Modelamiento de la cinemática y dinámica de un robot manipulador de cuatro grados de libertad tipo SCARA para el diseño e implementación en simulación de un controlador lineal por realimentación tipo CTC (Computer Torque Control).» Barranquilla, 2008.
36. Valencia, G.E., J. C Turizo, y M.E. Sanjuan. «Diseño de un controlador por Torque Calculado CTC de un Robot Manipulador Tipo SCARA.» *Revista inge@UAN 2*, nº 3 (2011): 12-14.

## *Bibliografía*

37. Villafuerte, M. «Diseño de un controlador por lógica difusa aplicado a un robot manipulador.» Tesis de Maestría, México, 2012.
38. Vivas, Albán, O. «Control Predictivo de un robot tipo SCARA.» *Revista Chilena de Ingeniería. No. 2, Vol. 14, (2006): 135-145.*
39. Yarza, A., y V. Santibáñez. «Control de Robots manipuladores: Análisis de Estabilidad vía Perturbaciones Singulares.» Congreso Anual 2009 de la Asociación de México de Control Automático., México, 2009.
40. Zambrano, D., y W. García Gabín. «Control predictivo por modo deslizante para robots manipuladores.» *Revista Ingeniería UC. 11, nº 2 (2004): 39-47.*

## ANEXOS

### Anexo 1. Código bloque MCI.

```
function MCI[qd1,qd2] = fcn(xd,yd)
l1=0.1933;
l2=0.1458;
a=((xd)^2)+((yd)^2)-((l1)^2)-((l2)^2)/(2*(l1)*(l2));
b=sqrt(1-((a)^2));
qd2=atan2(b,a);
c=atan2(yd,xd);
d=atan2((l2)*sin(qd2),((l1)+(l2)*cos(qd2)));
qd1=c-d;
```

### Anexo 2. Código bloque M<sup>-1</sup>.

```
function M^-1 [N11,N12,N21,N22]=fcn(q2,m1,m2,l1,lc1,lc2,I1,I2)
a=m1*lc1^2;
b=(l1^2+lc2^2+2*l1*lc2*cos(q2))*m2;
c=I1+I2;
M11=a+b+c;
a1=(lc2^2+l1*lc2*cos(q2))*m2;
M12=a1+I2;
M21=M12;
M22=m2*lc2^2+I2;
M= [M11 M12;M21 M22];
N=inv(M);
N11=N(1);
N12=N(2);
N21=N(3);
N22=N(4);
```

### Anexo 3. Código bloque C.

```
function C[C11,C12,C21] = fcn(dq1,dq2,q2,m2,l1,lc2)
C11=-m2*l1*lc2*sin(q2)*dq2;
C12=-m2*l1*lc2*sin(q2)*(dq1+dq2);
C21=m2*l1*lc2*sin(q2)*dq1;
```

### Anexo 4. Código bloque G.

```
function G[G1,G2] = fcn(g,q1,q2,m1,m2,l1,lc1,lc2)
G=[((m1*lc1+m2*l1)*(g)*sin(q1))+((m2*lc2)*(g)*sin(q1+q2));((m2)*(g)*(lc2)*sin(q1+q2))];
G1=G(1);
G2=G(2);
```

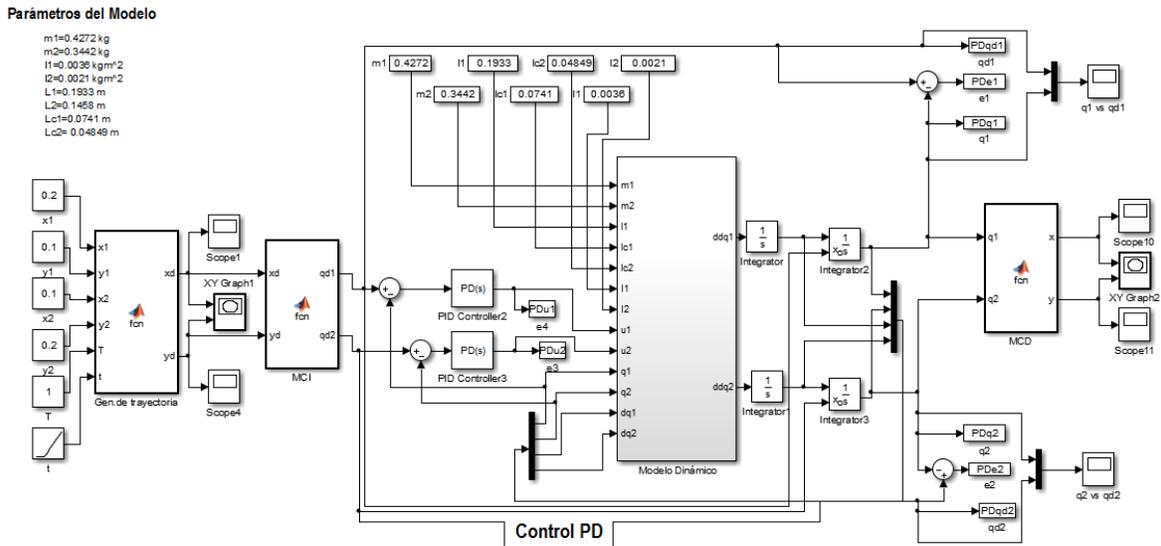
### Anexo 5. Código bloque Modelo Dinámico.

```
function Modelo Dinámico[ddq1,ddq2] =
fcn(g1,g2,dq1,dq2,C11,C12,C21,N11,N12,N21,N22,u1,u2)
C22=0;
ddq1=N11*u1-N11*C11*dq1-N11*C12*dq2-N11*g1+N12*u2-N12*C21*dq1-
N12*C22*dq2-N12*g2;
ddq2=N21*u1-N21*C11*dq1-N21*C12*dq2-N21*g1+N22*u2-N22*C21*dq1-
N22*C22*dq2-N22*g2;
```

### Anexo 6. Código bloque MCD.

```
function MCD[x,y] = fcn(q1,q2)
l1=0.1933;
l2=0.1458;
x=((l1)*(cos(q1)))+(l2)*(cos((q1)+(q2)));
y=((l1)*(sin(q1)))+(l2)*(sin((q1)+(q2)));
```

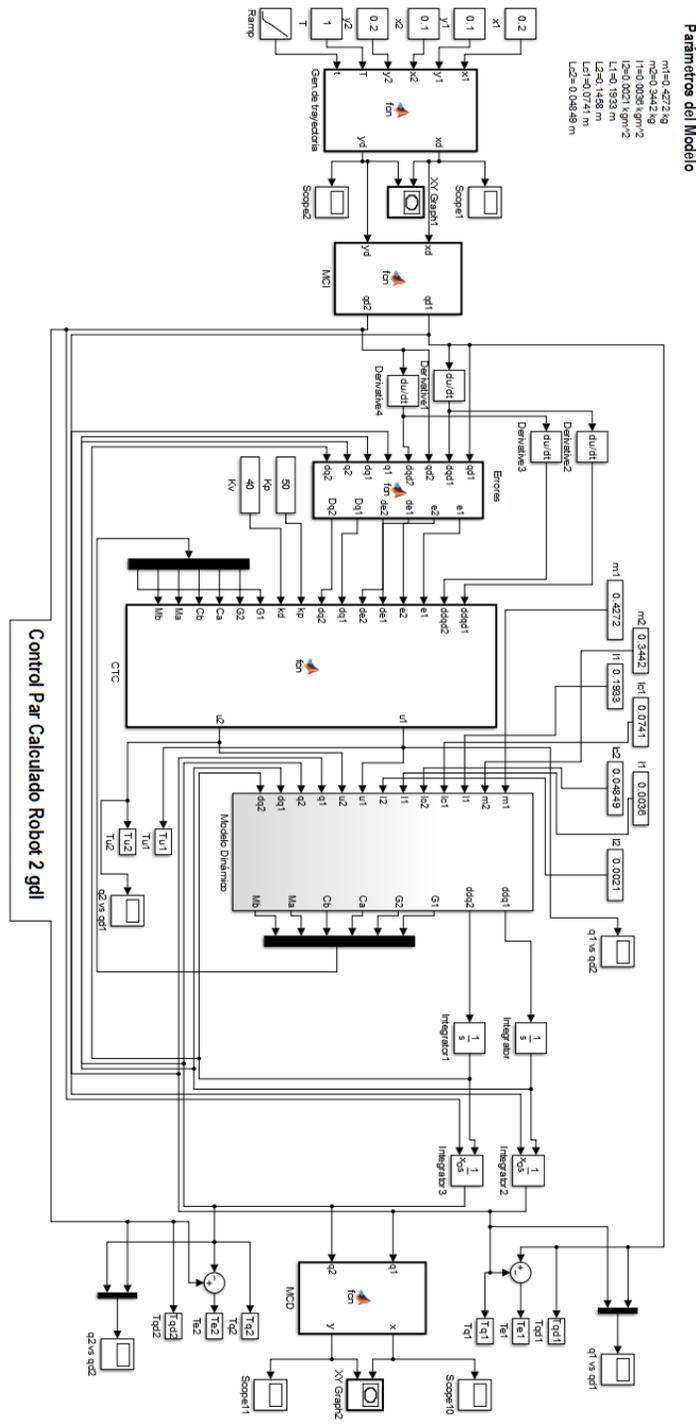
### Anexo 7. Esquema General con control PD.



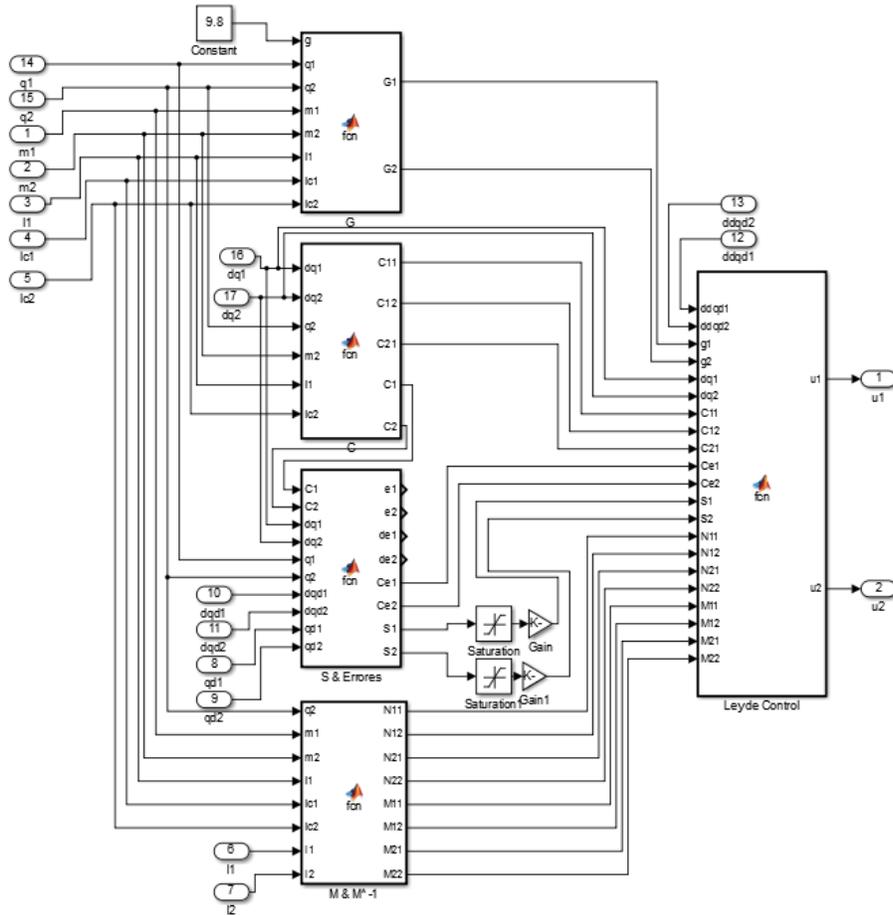
### Anexo 8. Código bloque CTC.

```
function CTC[u1,u2] =
fcn(ddqd1,ddqd2,e1,e2,de1,de2,dq1,dq2,kp,kd,G1,G2,Ca,Cb,Ma,Mb)
u1=((Ma)*((ddqd1)+((kp)*(e1))+((kd)*(de1))))+((Ca)*(dq1))+G1;
u2=((Mb)*((ddqd2)+((kp)*(e2))+((kd)*(de2))))+((Cb)*(dq2))+G2;
```

Anexo 9. Esquema General con CTC.



Anexo 10. Esquema interno del bloque CMD.



Anexo 11. Esquema General con CMD.

